

**CONTROL ROBUSTO ACOPLADO DE SISTEMAS MULTIVARIABLES
APLICADO A VEHÍCULOS AÉREOS NO TRIPULADOS**

JHON ABRAHAM BONILLA BECERRA

C.C. 1.115.074.625

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE INGENIERÍAS

MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

PEREIRA-RISARALDA

2019

**CONTROL ROBUSTO ACOPLADO DE SISTEMAS MULTIVARIABLES
APLICADO A VEHÍCULOS AÉREOS NO TRIPULADOS**

JHON ABRAHAM BONILLA BECERRA

C.C. 1.115.074.625

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de
Magister en Ingeniería Eléctrica**

DIRECTOR

Ph.D. Eduardo Giraldo Suárez

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE INGENIERÍAS

MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

PEREIRA-RISARALDA

2019

AGRADECIMIENTOS

Quiero brindar mis mas sinceros agradecimientos a todas las personas que de forma directa o indirecta han aportado un grano de arena a la realización de este proyecto, así como a mi formación personal y profesional.

Agradezco a mi director de proyecto Ph.D. Eduardo Giraldo Suárez quién fue guía, y facilitó las herramientas fundamentales durante cada etapa del proceso.

A a mis amigos y compañeros en de la facultad de Ingeniería Eléctrica quienes aportaron conocimientos y experiencias enriquecedoras.

Agradezco a Angelo Marín, compañero de maestría y actual docente de la facultad de Ingeniería Eléctrica quien me brindó sus conocimientos y asesoría.

Finalmente a mi familia por ser un apoyo emocional y económico incondicional, a ellos les debo los cimientos sobre los que he construido cada etapa de mi vida.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN.....	8
INTRODUCCIÓN.....	8
Objetivo general.....	14
Objetivos específicos.....	14
1. Descripción y modelo matemático de un vehículo aéreo no tripulado	15
1.1 Modelamiento matemático del QuadCopter	15
1.2 Momento de inercia	16
1.3 Ecuaciones de estado.....	17
2. Identificación multivariable	19
2.1 Representación de sistemas multivariables	19
2.2 Esquemas de identificación en línea.....	21
2.3 Mínimos cuadrados	22
2.3.1 Mínimos cuadrados recursivos.....	24
2.3.2 Proyección	27
3. Control robusto	29
3.1 Control H^∞	29
3.1 Sensibilidad Mixta.....	31
3.2 Diseño del controlador robusto	34
4. Resultados y Análisis	39
4.1 Estimación del QuadCopter	40
4.1.1 Identificación usando mínimos cuadrados recursivos para el sistema con 3 entradas y 3 salidas.....	40
4.1.2 Identificación usando proyección para el sistema con 3 entradas y 3 salidas	42
4.2 Respuesta del sistema en lazo cerrado con un controlador robusto	44
4.3 Validación de resultados.....	49
CONCLUSIONES.....	53

Apéndice A.....	54
Apéndice B.....	57
BIBLIOGRAFÍA.....	58

Lista de Figuras.

Figura 1. Configuración multicópteros.....	9
Figura 2. Trayectoria para la adquisición de imágenes.	10
Figura 3. Mapa tridimensional generado a partir de varias imágenes. [2]	11
Figura 4. Drone para atención de emergencias médicas. [3]	11
Figura 5. Diagrama de configuración. [12]	16
Figura 6. Formulación del problema del control robusto. [18].....	30
Figura 7. Esquema de control con modelado de las perturbaciones. [18]	31
Figura 8. Esquema general de control robusto con sensibilidad mixta. [18]	34
Figura 9. Diseño de la función de ponderación para la sensibilidad. [18]	36
Figura 10. Modelo no lineal del QuadCopter. [1].....	40
Figura 11. Identificación con mínimos cuadrados recursivos de la planta con 3 entradas y 3 salidas. a) Roll. b) Pitch. c) Yaw. Fuente: Autor.....	41
Figura 12. Identificación con proyección de la planta con 3 entradas y 3 salidas. a) Roll. b) Pitch. c) Yaw. Fuente: Autor.	43
Figura 13. Respuesta del sistema multivariable estimado por mínimos cuadrados con control robusto H_∞ . a) Salida Roll. b) Salida Pitch. c) Salida Yaw. Fuente: Autor.	44
Figura 14. Señales de control robusto para el sistema multivariable estimado por mínimos cuadrados. a) Señal de control salida Roll. b) Señal de control salida Pitch. c) Señal de control salida Yaw. Fuente: Autor.	45
Figura 15. Respuesta del sistema multivariable estimado por proyección con control robusto H_∞ . a) Salida Roll. b) Salida Pitch. c) Salida Yaw. Fuente: Autor.	46
Figura 16. Señales de control robusto para el sistema multivariable estimado por mínimos cuadrados. a) Señal de control salida Roll. b) Señal de control salida Pitch. c) Señal de control salida Yaw. Fuente: Autor.	47
Figura 17 Respuesta de un controlador PID desacoplado. Fuente: Autor.....	48
Figura 18 Respuesta de controlador robusto acoplado. Fuente: Autor	48
Figura 19 Control ARC con salida constante deseada, usando una masa $m=0.550$. [20]	49
Figura 20 Respuesta deseada ($\phi_d, \theta_d, \omega_d$) y respuesta real (ϕ, θ, ω) de la planta controlada. [21]	50
Figura 21. Seguimiento $x=1, y=2, z=5$. [22].....	51
Figura 22 Respuesta del QuadCopter usando un controlador basado en modo deslizante. a) Respuesta estable del sistema. B) Respuesta inestable del sistema. [23]	51
Figura 23 Seguimiento de referencia con control óptimo. [24]	52

Índice de tablas

Tabla 1. Parámetros del sistema con 3 entradas y 3 salidas usando mínimos cuadrados recursivos.....	42
Tabla 2. Parámetros del sistema con 3 entradas y 3 salidas usando proyección.	43

RESUMEN

En este proyecto de grado, se describen procesos de identificación y control robusto acoplado de un vehículo aéreo no tripulado. Modelos en espacio de estados multivariable que describen la dinámica completa del sistema en tiempo discreto, son obtenidos a partir de los algoritmos de estimación lineal que tienen en cuenta los comportamientos de las variables de entradas/salidas para encontrar dicha representación discreta la cual describe la dinámica real de la planta.

Se selecciona una estructura de control robusto acoplado para el sistema multivariable. Teniendo en cuenta el sistema identificado se procede a realizar la planta aumentada, mediante la cual se va a diseñar el controlador robusto usando la norma H_{∞} , para lograr la estabilidad del sistema acoplado sin importar la incertidumbre que dicho modelo posea.

Se aplica la metodología propuesta sobre un vehículo aéreo no tripulado tipo QuadCopter, diseñando así la ley de control y el algoritmo de estimación sobre el entorno de *Simulink* del programa *Matlab*.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, debido a que cada día tenemos procesadores más potentes en un espacio cada vez más reducido a un menor precio, incluyendo sensores como acelerómetros, giroscopios, GPS, etc., ha surgido una nueva generación de UAV's, estos son llamados multi-rotores, los cuales difieren de los helicópteros y drones de ala fija convencionales en que tienen más de dos rotores en configuración vertical lo que les permite el despegue y aterrizaje en espacios reducidos, además permanecer suspendidos en un solo punto o desplazarse alrededor de este, este tipo de vehículos suele llamarse por sus siglas en inglés VTOL (Vertical Take Off and Landing). Con la aparición de estos vehículos y su fácil acceso al público en general, se han desarrollado aplicaciones civiles como la fotogrametría, agricultura inteligente, reportajes gráficos, inspección de líneas de alta tensión, mapeo tridimensional, detección de incendios forestales, medicina etc. [1]

En cuanto a los UAV multi-rotor, existen 4 tipos básicos de configuración: Tricóptero, QuadCóptero, HexaCóptero y OctoCóptero, los cuales tienen diferentes prestaciones, beneficios y contras. De cada una de estas se derivan diferentes configuraciones que se pueden comportar mejor según la aplicación. [1]

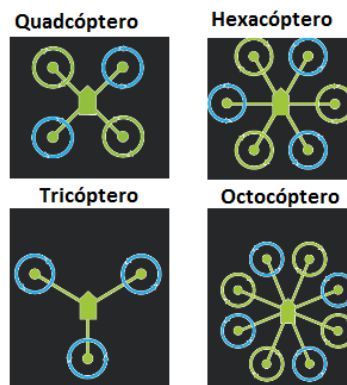


Figura 1. Configuración multicópteros.

A continuación, se describen algunas aplicaciones para los UAV's

- En la agricultura los UAV's se usan para el monitoreo de cultivos, enviando uno de estos vehículos a sobrevolar el área de cultivos con una cámara termográfica podría revelar zonas de estrés hídrico para así tomar las medidas necesarias; también se pueden utilizar para detectar enfermedades en los cultivos como la sigatoka en el caso del plátano. Otra posible utilidad de los drones en la agricultura es la fumigación de cultivos, estos vehículos al ser livianos y no necesitar de un piloto, reducen los costos de la operación.

- Los drones podrían significar una herramienta importante a la hora de evaluar catástrofes naturales; por ejemplo: después de un terremoto, uno de estos vehículos podría ser enviado para identificar las rutas de acceso a diferentes sitios en el área urbana, facilitando así la evacuación de las víctimas, también se podría detectar incendios forestales en su fase inicial, de esta manera tomar las acciones necesarias y prevenir un incendio de mayor tamaño.
- El mapeo tridimensional de un terreno consiste en la obtención de un modelo en tres dimensiones a partir de un conjunto de fotografías tomadas en puntos estratégicos.

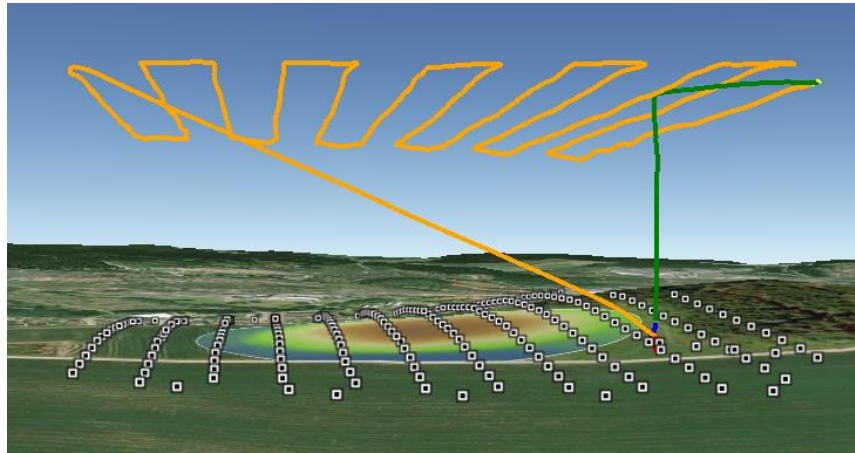


Figura 2. Trayectoria para la adquisición de imágenes.

La empresa Suiza SenseFly ha diseñado los eBee, un vehículo aéreo no tripulado capaz de realizar esta tarea. Este vehículo sobrevuela el área de interés y adquiere una serie de fotografías que posteriormente son procesadas en tierra para obtener el modelo tridimensional del terreno, esto puede resultar muy útil en sectores como el de la construcción, topografía, cartografía, etc. Cada uno de estos dispositivos tiene un valor comercial de \$29.500 dólares [9]. Recientemente el estado Colombiano ha realizado una inversión de 1.200 millones de pesos para adquirir esta tecnología. La cartografía Colombiana oficial tiene una escala de 1:100.000, esto significa que cada centímetro en el mapa representa 1.000m de distancia terrestre; el instituto geográfico Agustín Codazzi espera que para 2016 la escala sea de 1:50.000, 1:25.000 y 1:10.000, cada uno para zonas de diferente concentración de población siendo la escala 1:10.000 la utilizada donde se encuentra la mayor parte de la población; todo esto tiene el objetivo de tener un registro catastral certero principalmente para apoyar la política de restitución de tierras a las víctimas de la guerra. Una alternativa a “SenseFly Ebee” es la ofrecida por la plataforma libre ArduPilot, que funciona con el mismo principio. [2]



Figura 3. Mapa tridimensional generado a partir de varias imágenes. [2]

- En la medicina, también hay posibles aplicaciones para los UAV's, tal es el caso de un estudiante de la universidad "TU Delft", en Países Bajos quien ha implementado un drone ambulancia para ataques cardíacos, el proyecto consiste en un desfibrilador portátil que puede ser transportado por un drone dentro de un rango de 12 kilómetros cuadrados en menos de un minuto, cuando el vehículo llega a su destino, por medio del altavoz incorporado del drone, un operario explica el procedimiento para su correcto uso. Con esta aplicación, el creador espera que la tasa de supervivencia de personas que sufren ataques cardíacos se incremente considerablemente. [3]



Figura 4. Drone para atención de emergencias médicas. [3]

La existencia de los UAV's y sus innumerables aplicaciones conllevan a un nuevo reto para la ingeniería: Lograr aumentar la capacidad de autonomía de estos vehículos, grandes esfuerzos se han realizado para reducir al máximo la intervención humana sobre los UAV's, desde el seguimiento de trayectorias y el cambio de estas sin intervención humana, hasta el despegue y aterrizaje automático tanto en multi-rotors como en aeroplanos.

A continuación, se enumeran los diferentes grados de autonomía de un UAV.

- Nivel 0: El operador da órdenes directamente a los actuadores del UAV y controla su estabilidad
- Nivel 1: El UAV se estabiliza automáticamente y el operador controla su movimiento
- Nivel 2: El operador puede controlar la trayectoria del vehículo
- Nivel 3: Se pueden seleccionar waypoints que el UAV alcanzará automáticamente
- Nivel 4: El sistema de navegación es capaz de identificar automáticamente waypoints intermedios que le permiten al operador seleccionar la ruta a seguir. (Este nivel de autonomía se alcanzó en el proyecto ReSSAC rotorcraft desde el 2003)
- Nivel 5: El operador decide la misión y el UAV toma decisiones automáticamente para llevar a cabo su labor, este nivel de autonomía también permite un aterrizaje autónomo en un área desconocida.

Una de las iniciativas encaminadas a investigar formas de aumentar la autonomía de los UAV's es el proyecto ReSSAC del laboratorio Aeroespacial francés ONERA, entre sus principales proyectos se pueden encontrar:

- Uso de procesamiento de imágenes para evitar obstáculos, seguimiento de terreno y caracterización del sitio de aterrizaje.
- Acciones programadas y reprogramación de vuelo en ambientes desconocidos.
- Demostraciones de seguridad y mejoramiento de los sistemas de navegación actuales. [4]

Las principales bases para lograr un buen rendimiento en las aplicaciones mencionadas y en la autonomía de un UAV se reducen a 2: El control de estabilidad del vehículo y su precisión en el seguimiento de trayectorias.

En los pasados 10 años muchos investigadores han demostrado grandes avances en cuanto a los sistemas de control de navegación y estabilidad de los UAV'S.

En 2009 un grupo de investigadores de la universidad de Stanford desarrollaron un Quadrotor siguiendo la metodología "model based design" para demostrar los efectos aerodinámicos que influyen sobre el UAV, y desarrollar técnicas de control que compensan estos efectos; sus pruebas realizadas en STARMAC (Stanford Testbed of Autonomous Rotorcraft for Multi Agent Control) demostraron su precisión y mejora con los sistemas de control propuestos. [5]

Las cámaras de video también se han utilizado para realizar control sobre UAV's, un ejemplo de esto son los excelentes resultados que alcanzó Bouabdallah en [6] donde se enviaban imágenes a una estación en tierra, se procesaban, se tomaban decisiones y de acuerdo a estas se enviaban comandos de vuelta al UAV, una configuración similar es la presentada por Kemp en [7], sin embargo aún se dificulta la transmisión de video de buena calidad en tiempo real y a largas distancias a través de una conexión inalámbrica. [8]

Para superar este problema, investigadores como Raffaello D' Andrea utilizan múltiples cámaras infrarrojas que detectan adhesivos reflectivos instalados en el vehículo, el cual se desplaza dentro de un recinto cerrado. Este sistema logra estimar con gran precisión la posición del UAV lo que les ha permitido desarrollar proyectos como el expuesto en [9], en el que tres QuadCopter sostienen una red para lanzar y atrapar una pelota de forma cooperativa.

En [10] se desarrolló un proyecto de péndulo invertido sobre QuadCopter en el cuál una vara tiene una esfera en su punta superior que le permite al sistema de cámaras calcular su posición y así mantenerlo balanceado; un proyecto más avanzado relacionado con el péndulo invertido es el explicado en [11], en el que una vara es lanzada desde un QuadCopter y recibida por otro manteniéndolo balanceado, para eso se realizó el modelado del péndulo independiente de los vehículos mediante un observador de Luenberger. Ya que la dinámica de la vara cambia dependiendo si está en el aire o si está siendo balanceada, se implementó un observador con múltiples filtros Kalman.

El principal problema de estos desarrollos es que necesitan un ambiente controlado y adaptado con sensores para su funcionamiento, lo que los hace imprácticos para vuelos en exteriores.

Objetivo general

Diseñar e implementar un controlador robusto multivariable para vehículos Aéreos no tripulados, considerando las perturbaciones internas, externas, minimizando la incertidumbre y el efecto de acoplamiento inherente en estos sistemas.

Objetivos específicos

- Modelar matemáticamente un sistema no tripulado (sistema multivariable) considerando las perturbaciones internas y externas presentes en el sistema.
- Desarrollar una metodología de identificación paramétrica de sistemas multivariados que permitan obtener un modelo adecuado para el diseño del controlador robusto multivariable.
- Diseñar un controlador robusto acoplado multivariable que tenga en cuenta las perturbaciones del vehículo aéreo no tripulado.

Capítulo 1

1. Descripción y modelo matemático de un vehículo aéreo no tripulado

A continuación, se presenta una descripción matemática de un vehículo aéreo no tripulado, en donde se muestran las ecuaciones no lineales que rigen el comportamiento de los diferentes elementos del sistema y los parámetros generales de operación.

1.1 Modelamiento matemático del QuadCopter

Inicialmente el QuadCopter es una planta en la que se controlan 3 variables (Roll, Pitch, Yaw) cambiando la velocidad en sus 4 motores. Para facilitar el problema de control, este se puede convertir en un sistema de 3 entradas, 3 salidas agregando un mezclador que relacione el Roll, Pitch, Yaw deseados con sus salidas. [12]

Es muy importante tener en cuenta las posibles configuraciones que puede adoptar un QuadCopter la más común y estudiada en este proyecto es la configuración “X”, aunque también puede adoptar una configuración “+” como se observa en la figura 1.

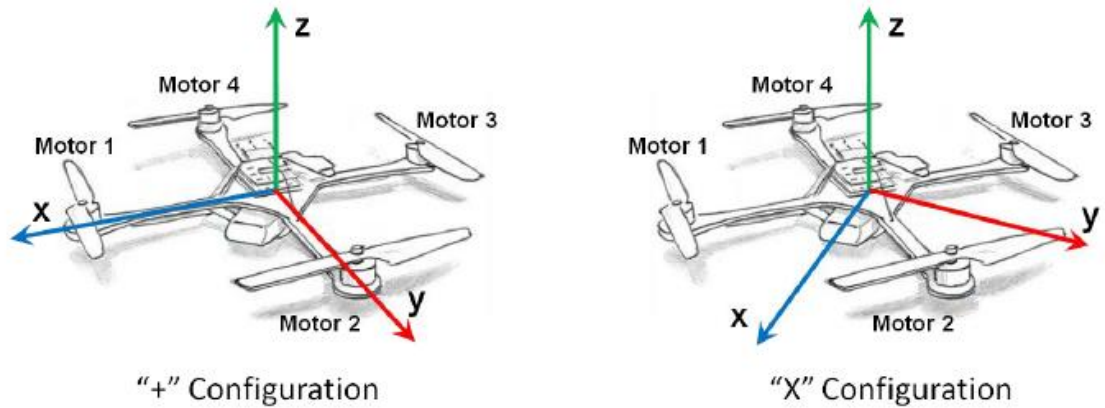


Figura 5. Diagrama de configuración. [12]

Para la configuración estudiada, la matriz que relaciona las entradas con las salidas se define como:

$$\begin{bmatrix} \Sigma T \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ct & Ct & Ct & Ct \\ -d * Ct & d * Ct & d * Ct & -d * Ct \\ -d * Ct & -d * Ct & d * Ct & d * Ct \\ -Cq & Cq & -Cq & Cq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^2 \\ w_2^2 \\ w_3^2 \\ w_4^2 \end{bmatrix} \quad (1.0)$$

Donde Cq es el coeficiente de torque que se asume igual para todos los motores del QuadCopter, $d = dist * \sin(45^\circ)$, $dist$ la distancia desde cada motor al centro del vehículo, Ct el coeficiente de empuje (Thrust), w_i la velocidad de cada motor y ΣT el empuje total. [12]

1.2 Momento de inercia

Para describir el momento de inercia del QuadCopter se utiliza la matriz de momentos de inercia; asumiendo que el vehículo es completamente simétrico, la matriz está dada por:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

1.3 Ecuaciones de estado

Sobre el QuadCopter también actúan fuerzas giroscópicas, estas son generadas por la precesión giroscópica de cada uno de los rotores. Estas se denotan como Gp_ϕ y Gp_θ para el alabeo y cabeceo respectivamente. [12]

La ecuación de estado para la velocidad angular se define como:

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = I^{-1} \left[M - \Omega I \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \right] \quad (1.2)$$

Donde M es la matriz que contiene todos los momentos del sistema y está definida por:

$$M = \begin{bmatrix} \tau_\phi + Gp_\phi \\ \tau_\theta + Gp_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Ω es el tensor para la velocidad angular y está definido por:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -R & Q \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

La posición angular del QuadCopter se definirá utilizando los ángulos de Euler, estos forman un conjunto de 3 coordenadas que sirven para representar la orientación de un sistema de ejes ortogonales respecto a otro sistema de ejes ortogonales normalmente fijos, donde ϕ representa el alabeo que es la rotación en el eje longitudinal “x”, θ representa el cabeceo que es la rotación en el eje transversal “y”, y finalmente ψ que es la rotación en el eje vertical “z”. [13]

Estas rotaciones se representan mediante la matriz de rotación R con respecto a un eje de coordenadas en tierra, donde C=Coseno y S=Seno. [14]

$$R = \begin{bmatrix} C\psi C\theta & C\psi C\theta S\phi - S\psi C\phi & C\psi S\theta C\phi + S\psi S\phi \\ S\psi C\theta & S\psi S\theta S\phi + C\psi C\phi & S\psi S\theta C\phi - C\psi S\phi \\ -S\theta & C\theta S\phi & C\theta C\phi \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Por convención de la secuencia de rotación aeroespacial, la rotación de una aeronave se puede expresar como la rotación del eje z, seguido a la rotación del eje y, y por último la rotación en el eje x; usando las matrices de rotación secuencial se obtiene la ecuación cinemática de los ángulos de Euler:

$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & T\theta S\phi & T\theta C\phi \\ 0 & C\phi & -S\phi \\ 0 & S\phi/C\theta & C\phi/C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Capítulo 2

2. Identificación multivariable

En este capítulo se condensa la metodología utilizada para la estimación de parámetros de sistemas multivariables.

2.1 Representación de sistemas multivariables

La representación de un sistema discreto multivariable con p salidas y l entradas con operador de retardo r , se puede representar de la forma. [15][16]

$$A(r^{-1})y[k] = B(r^{-1})u[k] \quad (2.0)$$

Donde A esta dado por

$$A(r^{-1}) = A_0 + A_1(r^{-1}) + A_2(r^{-2}) + \dots + A_n(r^{-n}) \quad (2.1)$$

Y B esta dado por

$$B(r^{-1}) = B_1(r^{-1}) + B_2(r^{-2}) + \dots + B_m(r^{-m}) \quad (2.2)$$

con $n \geq m$ y A_i es de dimension $p * p$, B_i de dimension $p * l$, ademas de las entradas $u[k]$ corresponden a un vector de dimension $l * 1$ y las salidas $y[k]$ corresponden a un vector de dimension $p * 1$ de la forma:

$$y[K] = \begin{bmatrix} y_1[k] \\ y_2[k] \\ \vdots \\ y_p[k] \end{bmatrix}, \quad u[K] = \begin{bmatrix} u_1[k] \\ u_2[k] \\ \vdots \\ u_l[k] \end{bmatrix}$$

Si $A_0 = I$ con I siendo la matriz identidad, se obtiene

$$[I + A_1(r^{-1}) + \dots + A_n(r^{-n})]y[k] = [B_1(r^{-1}) + \dots + B_m(r^{-m})]u[k] \quad (2.3)$$

$$y[k] = [B_1u[k-1] + \dots + B_mu[k-m] - A_1y[k-1] - \dots - A_nu[k-n]] \quad (2.4)$$

Donde A_i y B_i son de la forma:

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & \dots & a_{1p}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i & \dots & a_{2p}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}^i & a_{p2}^i & \dots & a_{pp}^i \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & \dots & b_{1l}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i & \dots & b_{2l}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1}^i & b_{p2}^i & \dots & b_{pl}^i \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

De las ecuaciones (2.5) y (2.3) se puede expresar la salida y_i en términos de las entradas y las salidas anteriores como:

$$\begin{aligned} y_i = & a_{i1}^1 y_1[k-1] + a_{i2}^1 y_2[k-1] + \dots + a_{ip}^1 y_p[k-1] + a_{i1}^2 y_1[k-2] \\ & + a_{i2}^2 y_2[k-2] + \dots + a_{ip}^2 y_p[k-2] + \dots + a_{i1}^n y_1[k-n] + \\ & a_{i2}^n y_2[k-n] + \dots + a_{ip}^n y_p[k-n] + b_{i1}^1 u_1[k-1] + b_{i2}^1 u_2[k-1] + \dots \\ & + b_{il}^1 u_l[k-1] + b_{i1}^2 u_1[k-2] + b_{i2}^2 u_2[k-2] + \dots + b_{il}^2 u_l[k-2] + \dots \\ & + b_{i1}^m u_1[k-m] + b_{i2}^m u_2[k-m] + \dots + b_{il}^m u_l[k-m] \end{aligned} \quad (2.6)$$

De (2.6) tenemos que el modelo DARMA representado en (2.0), se puede expresar de la forma:

$$y[k] = \theta^T[k-1]\phi[k-1]; \quad k \geq 0 \quad (2.7)$$

Donde tenemos que la matriz θ^T está conformada por los parámetros de las matrices $A(r^{-1})$ y $B(r^{-1})$, por lo tanto el tamaño de θ es de $(l * m + p * n) * p$, esto es:

$$\theta^T = \begin{bmatrix} b_{11}^1 & \dots & b_{11}^m & \dots & b_{1l}^1 & \dots & b_{1l}^m & -a_{11}^1 & \dots & -a_{11}^n & \dots & -a_{1p}^1 & \dots & -a_{1p}^n \\ b_{21}^1 & \dots & b_{21}^m & \dots & b_{2l}^1 & \dots & b_{2l}^m & -a_{21}^1 & \dots & -a_{21}^n & \dots & -a_{2p}^1 & \dots & -a_{2p}^n \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{p1}^1 & \dots & b_{p1}^m & \dots & b_{pl}^1 & \dots & b_{pl}^m & -a_{p1}^1 & \dots & -a_{p1}^n & \dots & -a_{pp}^1 & \dots & -a_{pp}^n \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Se tiene que $\phi[k-1]$ es un vector de dimensión $(l * m + p * n) * 1$ y contiene los valores de las entradas y salidas anteriores.

$$\phi[k-1] = \begin{bmatrix} y_1[k-1] \\ \vdots \\ y_p[k-1] \\ \vdots \\ y_1[k-n] \\ \vdots \\ y_p[k-n] \\ \vdots \\ u_1[k-1] \\ \vdots \\ u_l[k-1] \\ \vdots \\ u_1[k-m] \\ \vdots \\ u_l[k-m] \end{bmatrix}$$

2.2 Esquemas de identificación en línea

El objetivo de la estimación en línea es encontrar los parámetros del sistema multivariable basándose en los valores anteriores de las entradas y salidas, se denota que la matriz de parámetros encontrados $\hat{\theta}[k]$ también requiere los valores

de la matriz anterior de dichos parámetros estimados $\hat{\theta}[k - 1]$, como se presenta a continuación: [16][17]

$$\hat{\theta}[k] = \hat{\theta}[k - 1] + M[k - 1]\phi[k - 1]e[k] \quad (2.10)$$

Donde $M[k - 1]$ denota la ganancia del algoritmo (posiblemente es una matriz) y $e[k]$ es un vector de los errores de estimación de las salidas, representado de la forma:

$$e[k] = y^T[k] - \hat{y}^T[k] \quad (2.11)$$

El vector $\hat{y}[k]$ se calcula a partir de la matriz de parámetros obtenidos en la identificación anterior y el vector de entradas y salidas pasadas.

$$\hat{y}[k] = \hat{\theta}[k - 1]^T \phi[k - 1] \quad (2.12)$$

La ecuación (2.10) nos muestra un algoritmo que permite calcular los parámetros del sistema en cada nuevo instante dependiente del tiempo muestreo, es decir que la estimación se logra de forma recursiva.

2.3 Mínimos cuadrados

El método de mínimos cuadrados es aplicado a una gran variedad de problemas. Se tiene que es de forma simple si el modelo matemático se describe de la siguiente manera: [16][17]

$$y[i] = \phi_1[i]\theta_1^0 + \phi_2[i]\theta_2^0 + \dots + \phi_n[i]\theta_n^0 = \phi^T[i]\theta^0 \quad (2.13)$$

Donde $y[i]$ es la variable observada, $\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_n^0$ son los parámetros del modelo a determinar. $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ son funciones conocidas que pueden depender de las variables de entrada y de salida. El modelo dependiente de la variable i , describe el número de la muestra. Las variables ϕ_i son llamados vectores de regresión, por lo que el modelo descrito en (2.13) tiene por nombre estimador de regresión lineal.

Si extendemos este modelo a la representación de sistemas descrito en la sección anterior tenemos:

$$\begin{aligned} y[i] &= -A_1[i]y[i - 1] - \dots - A_n[i]y[i - n] + B_1[i]u[i - 1] + \dots + B_m[i]u[i - m] \\ &= \hat{\theta}^T \phi[i - 1] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Donde

$$\hat{\theta}[i]^T = [A_1 A_2 \dots A_n B_1 B_2 \dots B_m]$$

$$\phi[i-1] = \begin{bmatrix} -y[i-1] \\ -y[i-2] \\ \vdots \\ -y[i-n] \\ u[i-1] \\ u[i-2] \\ \vdots \\ u[i-m] \end{bmatrix}$$

Los valores de las variables de entrada y salida del sistema $\{(y[i], \phi[i-1]), i = 1, 2, \dots, k\}$ pueden ser obtenidos de forma experimental. El problema es determinar los parámetros de tal manera que las salidas calculadas a partir del modelo de la ecuación (2.14) sea lo más cercano posible a las variables reales $y[i]$. Es decir, los parámetros $\hat{\theta}$ deben ser elegidos de tal manera que minimice la función de costo.

$$V(\theta, i) = \frac{1}{2} \sum_{i=n+1}^k (y[i] - \theta^T \phi[i-1])^2 \quad (2.15)$$

Debido a que las medidas de las variables son lineales en los parámetros θ y el criterio de los mínimos cuadrados es cuadrático, el problema admite una solución analítica. Introduciendo la notación $n = m$.

$$Y[k] = \begin{bmatrix} y[n+1]^T \\ y[n+2]^T \\ \vdots \\ y[k]^T \end{bmatrix} \quad E[k] = \begin{bmatrix} e[n+1]^T \\ e[n+2]^T \\ \vdots \\ e[k]^T \end{bmatrix}$$

$$\phi[k] = \begin{bmatrix} -y[n]^T & -y[n-1]^T & \dots & -y[1]^T & u[n]^T & u[n-1]^T & \dots & -u[1]^T \\ -y[n+1]^T & -y[n]^T & \dots & -y[2]^T & u[n+1]^T & u[n]^T & \dots & -u[2]^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y[k+1]^T & -y[k]^T & \dots & -y[k-n]^T & u[k-1]^T & u[k-2]^T & \dots & -u[k-n]^T \end{bmatrix}$$

$$\phi[k] = \begin{bmatrix} \phi(n)^T \\ \phi[n+1]^T \\ \vdots \\ \phi[k-1]^T \end{bmatrix}$$

$$P[k] = (\phi[k]^T \phi[k])^{-1} = (\sum_{i=n+1}^k \phi[i-1] \phi[i-1]^T)^{-1} \quad (2.16)$$

Donde los errores $e[i]$ son definidos por:

$$e[i] = y[i] - \hat{y}[i] = y[i] - \theta^T \phi[i-1] \quad (2.17)$$

Con estas notaciones la función de costo (2.15) puede ser reescrita como:

$$V(\theta, i) = \frac{1}{2} \sum_{i=n+1}^K e[i]^2 = \frac{1}{2} E^T E = \frac{1}{2} \|E\|^2 \quad (2.18)$$

Donde E puede ser escrito como:

$$E = y - \hat{y} = y - \phi \theta$$

La solución al problema de mínimos cuadrados está dada de la siguiente forma:

La función de la ecuación (2.15) es mínima para parámetros $\hat{\theta}$ tal que:

$$\phi^T \phi \hat{\theta} = \phi^T y \quad (2.19)$$

Si la matriz $\phi^T \phi$ es no singular, el mínimo es único y está dado por:

$$\hat{\theta} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T y \quad (2.20)$$

2.3.1 Mínimos cuadrados recursivos

Cuando se implementa un control adaptativo, las muestras se obtienen de forma secuencial y en tiempo real. La ecuación de estimación de mínimos cuadrados

puede ser cambiada de tal forma que el resultado obtenido en $[k - 1]$, pueda ser utilizado para obtener la estimación en el tiempo $[k]$.

Asumiendo que la matriz $\phi^T \phi$ es no singular para todo k . Se deduce de la definición de $P[k]$ en la ecuación (2.16) que: [17]

$$\begin{aligned} P^{-1}[k] &= \phi^T[k] \phi[k] = \left(\sum_{i=n+1}^k \phi[i-1] \phi[i-1]^T \right)^{-1} \\ &= \sum_{i=n+1}^k \phi[i-1] \phi[i-1]^T + \phi[k-1] \phi[k-1]^T \\ &= P^{-1}[k-1] + \phi[k-1] \phi[k-1]^T \end{aligned} \quad (2.21)$$

Los parámetros estimados $\hat{\theta}[k]$ es dado por la ecuación (2.20) y puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}[k] &= \left(\sum_{i=n+1}^k \phi[i-1] \phi[i-1]^T \right)^{-1} \left(\sum_{i=n+1}^k \phi[i-1] y[i]^T \right) \\ &= P[k] \left(\sum_{i=n+1}^k \phi[i-1] y[i]^T \right) \\ &= P[k] (\sum_{i=n+1}^k \phi[i-1] y[i]^T + \phi[k-1] y[k]^T) \end{aligned} \quad (2.22)$$

De las ecuaciones (2.21) y (2.22), se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=n+1}^{k-1} \phi[i-1] y[i]^T &= P^{-1}[K-1] \hat{\theta}[K-1] \\ &= P^{-1}[K] \hat{\theta}[K-1] - \phi[K-1] \phi[K-1]^T \hat{\theta}[K-1] \end{aligned} \quad (2.23)$$

La estimación en el tiempo $[k]$ es entonces:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}[k] &= \hat{\theta}[k-1] - P[k] \phi[k-1] \phi[k-1]^T \hat{\theta}[k-1] + P[k] \phi[k-1] y[k]^T \\ &= \hat{\theta}[k-1] + P[k] \phi[k-1] \left[y[k]^T - \phi[k-1]^T \hat{\theta}[k-1] \right] \\ &= \hat{\theta}[k-1] + K[k] e[k]^T \end{aligned} \quad (2.24)$$

Donde

$$K[k] = P[k]\phi[K-1] \quad y \quad e[k]^T = y[k]^T - \phi[k-1]^T \hat{\theta}[K-1]$$

Para continuar, es necesario encontrar una ecuación recursiva para $P[k]$ o más bien de su inversa (2.21); para ello se utiliza el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1 Sean A, C y $C^{-1} + DA^{-1}B$ matrices cuadradas no singulares. Entonces $A + BCD$ es invertible, y

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BC^{-1} + DA^{-1}B^{-1}DA^{-1}$$

Aplicando lo anterior a $P[k]$ y usando la ecuación (1.21), tenemos:

$$\begin{aligned} P[K] &= (P[K-1]^T + \phi[k-1]\phi[K-1]^T)^{-1} \\ &= P[K-1] - P[k-1]\phi[k-1][I + \phi[K-1]^T P[k-1]\phi[K-1]]^{-1} \phi[K-1]^T P[k-1] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Lo que implica que:

$$K[k] = P[k]\phi[k-1] = P[k-1]\phi[K][I + \phi[k-1]^T P[k-1]\phi[k-1]]^{-1} \quad (2.26)$$

Y por consiguiente:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}[k] &= \hat{\theta}[k-1] \\ &+ P[k-1]\phi[k-1][I + \phi[k-1]^T P[k-1]\phi[k-1]]^{-1}(y[k]^T - \phi[k-1]^T \hat{\theta}[k-1]) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$P[k] = P[K-1]$$

$$-P[k-1]\phi[k-1][I + \phi[k-1]^T P[k-1]\phi[k-1]]^{-1}\phi[k-1]^T P[k-1] \quad (2.28)$$

Las ecuaciones anteriores resultan de asumir que la matriz $\phi[k]$ es de rango completo, esto es, $\phi^T[k]\phi[k]$ es no singular para todo $k \geq k_0$.

Al revisar $\phi^T[k-1]P[k-1]\phi[k-1]$, la dimensión de $\phi[k-1]$ es un vector de $(p * n + l * m) * 1$, $P[k-1]$ es una matriz de $(p * n + l * m) \times (p * n + l * m)$, por

consiguiente el termino $\phi^T[k-1]P[k-1]\phi[k-1]$ es un escalar; lo que implica que las ecuaciones (2.27) y (2.28) pueden ser escritas como:

$$\hat{\theta}[k] = \hat{\theta}[k-1] + \frac{P[k-1]\phi[k-1]}{1+\phi[k-1]^T P[k-1]\phi[k-1]} (y[k]^T - \phi[k-1]^T \hat{\theta}[k-1]) \quad (2.29)$$

$$P[k] = P[k-1] - \frac{P[k-1]\phi[k-1]\phi[k-1]^T P[k-1]}{1+\phi[k-1]^T P[k-1]\phi[k-1]} \quad (2.30)$$

Donde la matriz $P[k]$ es la encargada de proveer la velocidad en que el algoritmo recursivo encuentra los parámetros del sistema, dado que si su diagonal presenta una inicialización en valores grandes esto determina que se encuentran lejos los valores iniciales de $\hat{\theta}[k-1]$. [17]

2.3.2 Proyección

El algoritmo de proyección es el resultado de encontrar $\hat{\theta}[k]$ a partir de los datos conocidos $\hat{\theta}[k-1]$ y $y[k]$ que minimizan la función de costo [17]

$$J = \frac{1}{2} \|\hat{\theta}[k] - \hat{\theta}[k-1]\|^2 \quad (2.31)$$

El problema está sujeto a

$$y[k]^T = \phi[k-1]^T \hat{\theta}[k] \quad (2.32)$$

El resultado de la solución de este problema de optimización se encuentra al introducir los multiplicadores de Lagrange, donde de (2.31) y (2.32) se tiene:

$$J_c = \frac{1}{2} \|\hat{\theta}[k] - \hat{\theta}[k-1]\|^2 + \lambda [y[k]^T - \phi[k-1]^T \hat{\theta}[k]] \quad (2.33)$$

El mínimo se encuentra cuando las derivadas parciales de (2.33) son igualadas a cero, esto es:

$$\frac{\partial J_c}{\partial \hat{\theta}} = 0, \quad \frac{\partial J_c}{\partial \lambda} \quad (2.34)$$

De donde se obtiene:

$$\hat{\theta}[k] - \hat{\theta}[k-1] - \lambda \phi[k-1] = 0 \quad (2.35)$$

$$y[k]^T - \phi[k-1]^T \hat{\theta}[k] = 0 \quad (2.36)$$

Reemplazando (2.35) y (2.36) en (2.34)

$$y[k]^T - \phi[k-1]^T [\hat{\theta}[k-1] + \lambda \phi[k+1]] = 0 \quad (2.37)$$

Resolviendo (2.37) para λ , se tiene:

$$\lambda = \frac{y[k]^T - \phi[k-1]^T \hat{\theta}[k-1]}{\phi[k-1]^T \phi[k-1]} \quad (2.38)$$

Sustituyendo (2.38) en (2.35) podemos encontrar la solución al problema de optimización y con ello una ecuación recursiva

$$\hat{\theta}[k] = \hat{\theta}[k-1] + \frac{\phi[k-1]}{c + \phi[k-1]^T \phi[k-1]} (y[k]^T - \phi[k-1]^T \hat{\theta}[k-1]) \quad (2.39)$$

Para evitar una división por cero se adiciona un valor pequeño de c en el denominador de la ecuación (2.39), de la siguiente forma:

$$c = \begin{cases} 0; & \phi[k-1]^T \phi[k-1] \neq 0 \\ 0.0001; & \phi[k-1]^T \phi[k-1] = 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

Capítulo 3

3. Control robusto

En este capítulo se concentra toda la contextualización para el diseño de los controladores robustos, donde se exponen las técnicas de control basadas en la optimización de norma H_∞ . Es importante resaltar que la norma H_∞ es adecuada para ser empleada en sistemas con incertidumbre.

La aplicación más importante de la teoría de optimización de norma infinita está en el control robusto, debido a que el diseño de controladores asegura estabilidad y buen funcionamiento en sistemas con incertidumbre. Por último, se tiene que el problema más estudiado en control robusto es la presencia de incertidumbre estructural debido a dinámica no modelada. [18]

3.1 Control H_∞

Se tiene que los modelos reducidos continienen incertidumbres en parametros no tenidos en cuenta, debido a esto, el principal objetivo es diseñar la ley de control que pueda alcanzar y preservar la estabilidad en lazo cerrado en la presencia de dinamica no modelada e incertidumbres parametricas. [18][19]

Se tiene, el siguiente diagrama de bloques para formular el problema general de control robusto, de la forma:

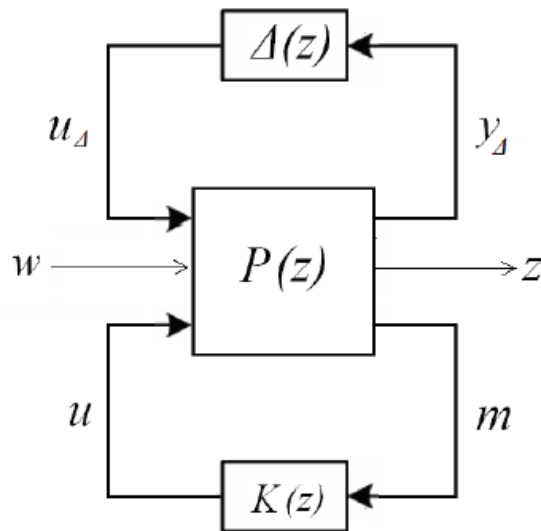


Figura 6. Formulación del problema del control robusto. [18]

Donde se definen los siguientes parametros:

- $P(z)$: modelo reducido (modelo nominal)
- $\Delta(z)$: incertidumbres
- $K(z)$: controlador

Con objeto de proporcionar una mayor descripción para los problemas de control robusto, se presentan las siguientes definiciones:

- Estabilidad Nominal: la planta controlada es estable sin importar incertidumbres en el modelo.
- Comportamiento Nominal: el sistema en lazo cerrado satisface las especificaciones de comportamiento sin importar incertidumbres en el modelo.
- Estabilidad Robusta: el sistema es estable para todas las plantas inciertas alrededor del modelo nominal, incluyendo hasta el peor caso del modelo de incertidumbre.
- Comportamiento Robusto: el sistema satisface las especificaciones de comportamiento en todas las plantas inciertas alrededor del modelo nominal, incluyendo el peor caso del modelo de incertidumbre.

Teniendo en cuenta que las incertidumbres son vistas como perturbaciones sobre el sistema. Si un único controlador es capaz de estabilizar la planta nominal y todos los sistemas dentro de la vecindad generada por perturbaciones, se dice que el controlador estabiliza robustamente toda la familia de sistemas. La búsqueda de la

mayor vecindad para una planta dada, para la que un controlador otorga estabilidad en lazo cerrado, es formulada mediante el problema de control H_∞ .

De tal forma se pretende encontrar un controlador, $K(z)$, que minimice el siguiente criterio:

$$\text{Min } \propto \|T_\infty\|_\infty^2$$

Sujeto a:

$$\|T_\infty\|_\infty^2 < \gamma_0 \quad (3.0)$$

Donde $T_\infty(z)$ corresponde con la función de transferencia en lazo cerrado entre el vector objetivo, z , y el vector de perturbaciones, w , siendo γ_0 la cota conseguida.

3.1 Sensibilidad Mixta

En esta subsección se presenta la sensibilidad mixta, para sintetizar un controlador robusto gracias a sencillos métodos de selección de las funciones de ponderación. [18]

Previamente es necesario definir las funciones de sensibilidad $S(z)$ y de sensibilidad complementaria $T(z)$. Para ello considérese el siguiente diagrama de bloques de control clásico por realimentación:

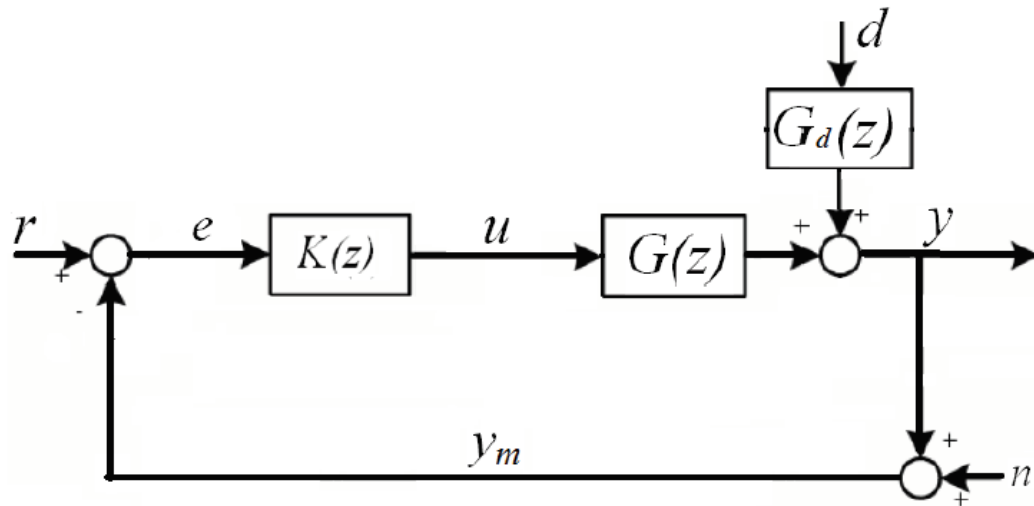


Figura 7. Esquema de control con modelado de las perturbaciones. [18]

Donde $K(z)$, $G(z)$ y $G_d(z)$ son respectivamente el controlador, el modelo de la planta y el modelo de las perturbaciones.

La entrada del controlador $K(z)$ es $r - y_m$ donde $y_m = y + n$ es la salida medida y n es el ruido de medida. Luego, la entrada a la planta es:

$$u = K(z)(r - y - n) \quad (3.1)$$

El objetivo de control es manipular u (en el diseño de $K(z)$) tal que el error de control e permanezca pequeño a pesar de las perturbaciones d . El error de control e es definido como:

$$e = r - y \quad (3.2)$$

Donde r corresponde al valor de referencia del sistema.

El modelo de la planta es descrito como:

$$y = G(z)u + G_d(z)d \quad (3.3)$$

Para un sistema con un controlador representado por (3.1), se tienen un modelo de la planta, de la forma:

$$y = G(z)K(z)(r - y - n) + G_d(z)d \quad (3.4)$$

Agrupando términos en (3.4), se tiene:

$$(I + G(z)K(z))y = G(z)K(z)r + G_d(z)d - G(z)K(z)n \quad (3.5)$$

Finalmente, la respuesta en lazo cerrado es:

$$y = (I + G(z)K(z))^{-1}[G(z)K(z)r + G_d(z)d - G(z)K(z)n] \quad (3.6)$$

Similar análisis es efectuado con el error de control e y la señal de entrada a la planta u , quedando las relaciones en lazo cerrado, entre la salida, y , el error, e , y la acción de control, u , respecto a la referencia, r , las perturbaciones, d , y el ruido, n , son:

$$\begin{aligned} y &= T(z)r + S(z)G_d(z)d - T(z)n \\ e &= r - y = S(z)r - S(z)G_d(z)d + T(z)n \\ u &= K(r - y_m) = K(z)S(z)r - K(z)S(z)G_d(z)d - K(z)S(z)n \end{aligned} \quad (3.7)$$

A partir de las anteriores ecuaciones definidas en este capítulo, se definen los siguientes conceptos:

Para la función de sensibilidad, se tiene:

$$S(z) = (I + L(z))^{-1} \quad (3.8)$$

La función de sensibilidad complementaria se define:

$$T(z) = L(z)(I + L(z))^{-1} \quad (3.9)$$

Se tiene la función de sensibilidad al control:

$$K(z)S(z) = K(z)(I + L(z))^{-1} \quad (3.10)$$

Por último, se define la función en lazo abierto como:

$$L(z) = G(z)K(z) \quad (3.11)$$

Nótese que tanto $S(z)$, como $T(z)$ y $K(z)S(z)$ son funciones de transferencia en lazo cerrado. Más específicamente, $S(z)$ es la función de transferencia que relaciona la perturbación con la salida del sistema, mientras que $T(z)$ relaciona la señal de referencia con la salida del sistema. Cabe aclarar que la función de sensibilidad complementaria para $T(z)$ viene de la siguiente expresión:

$$S(z) + T(z) = I \quad (3.12)$$

Por lo tanto, un decremento de $S(z)$ es directamente proporcional al incremento de $T(z)$, y viceversa. Si el objetivo principal es diseñar un controlador que minimice $S(z)$, lo cual implica a establecer una condición de seguimiento, se conseguirá a cambio de un incremento de $T(z)$, o lo que es lo mismo a cambio de aumentar la señal de control. Minimizar $S(z)$ se puede entender como minimizar la norma infinita de su respuesta frecuencial, que sería diseñar respecto la frecuencia en la cual hay un mayor error de seguimiento. Por otro lado, se debe tener en cuenta que el valor elevado de $T(z)$ puede ser causa de inestabilidad, debido al efecto en lazo cerrado de la incertidumbre.

El diagrama de bloques general para un controlador robusto, incluyendo las funciones de ponderación, es de la forma:



3.2 Diseño del controlador robusto

- **Estimación de la incertidumbre**

Se estima la incertidumbre de las funciones de transferencia, $G^*_i(z)$, de los puntos de operación donde se desee que el sistema funcione adecuadamente respecto al

modelo nominal, $G(z)$, obtenido en el punto central de operación, utilizando la siguiente ecuación:

$$E_{0,i}(z) = (G_i^*(z) - G(z))G(z)^{-1} \text{ con } i = 1,2,3, \dots \quad (3.13)$$

La incertidumbre multiplicativa nos entrega el porcentaje de desconocimiento que se tiene de la planta en cada frecuencia. Este porcentaje suele aumentar con la frecuencia y siempre habrá una frecuencia a partir de la cual el desconocimiento de la planta sea total, por ende, una frecuencia a partir de la cual el valor de la incertidumbre multiplicativa supere la unidad.

- **Cálculo de la matriz de ponderación $W_t(z)$**

Para el diseño de $W_t(z)$ se propone una matriz cuadrada y diagonal con todos sus elementos iguales a una misma función de transferencia $W_{Tdiag}(z)$:

$$W_t(z) = W_{Tdiag}(z)I_{q \times q} \quad (3.14)$$

La dimensión q es igual al número de salidas del sistema.

La función de transferencia $W_{Tdiag}(z)$ debe ser:

- Estable.
- De fase mínima.
- De modulo mayor que el máximo valor singular de las incertidumbres calculadas previamente para todas las frecuencias, es decir:

$$|W_{Tdiag}(j\omega)| \geq \sigma(E_{0,i}(j\omega)) \quad \forall \omega, \forall i \quad (3.15)$$

Además, teniendo en cuenta que $W_t(z)$ debe ponderar a la función de sensibilidad complementaria, para imponer que está tenga ganancia pequeña en alta frecuencia se diseñara cada función $W_{Tdiag}(z)$ de forma que su módulo posea un valor elevado en alta frecuencia.

- **Cálculo de la matriz de ponderación $W_s(z)$**

La matriz de ponderación $W_s(z)$ se describe de la forma:

$$W_s(z) = \begin{bmatrix} W_{s11}(z) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & W_{sii}(z) \end{bmatrix}$$

Por lo que se trata de una matriz de funciones de transferencia cuadrada diagonal de dimensión q igual al número de salidas del sistema.

Se diseñará cada función de transferencia $W_{sii}(z)$ de la diagonal utilizando la siguiente ecuación:

$$W_{sii}(z) = \frac{\alpha_i z + 10^{(k_i-1)\omega_T}}{z + \beta_i 10^{(k_i-1)\omega_T}} \quad (3.16)$$

Donde los parámetros de diseño que aparecen en estas funciones de transferencia serán elegidos de la siguiente forma:

- α_i : es la ganancia de la función en alta frecuencia. Es un indicador de la sobre oscilación permitida en la salida i-ésima del sistema. Un valor alto de α_i , implicara especificaciones de menor sobre oscilación. Un valor apropiado para cada α_i debería ser el orden de 0.5, suponiendo escalado el sistema.
- β_i : es la ganancia de la función a baja frecuencia. Hace las veces de la cota superior del error en régimen permanente permitido. Este valor no puede ser cero por problemas numéricos del algoritmo de síntesis. Un valor aceptable para este parámetro puede estar entre el límite de 10^{-6} y 10^{-4} .
- ω_T : es la frecuencia de corte de la función $W_{Tdiag}(z)$ previamente diseñada en el apartado anterior.
- k_i : este parámetro es el encargado de variar la especificación de ancho de banda de la i-ésima salida. La selección inicial propuesta es de $k_i = 0$, con lo que obtendrán respuestas lentas y muy pocas veces oscilatorias. A mayores valores de k_i , más rapidez de la respuesta correspondiente, pero también llevara asociada una mayor sobre oscilación.

La forma deseada del módulo de estas funciones de ponderación está dada por la siguiente gráfica:

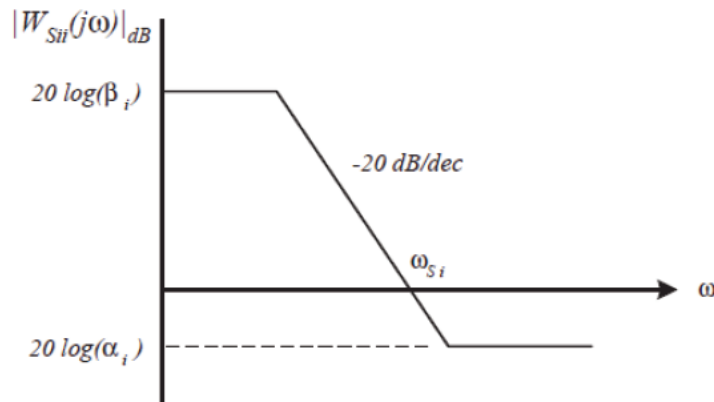


Figura 9. Diseño de la función de ponderación para la sensibilidad. [18]

- **Diseño de la función de ponderación $W_{ks}(z)$**

La función $W_{ks}(z)$ pondera a la función de sensibilidad al control, función que relaciona la referencia y perturbaciones con la actuación que proporciona el controlador. Por tanto, con esta función se penaliza la señal de control en el rango de la frecuencia deseado. Al utilizar la penalización sobre la señal de control se pretende disminuir la sobre oscilación sin afectar negativamente a los tiempos de subida.

Para el diseño de esta función de ponderación se utiliza el método, de la forma:

$$W_{ks}(z) = I_{m \times m} \quad (3.17)$$

Donde m es el número de entradas del sistema.

El controlador obtenido con esta función se implementa y se analiza la respuesta temporal que obtenga ante una entrada escalón, a partir de la cual, se estima la frecuencia de oscilación de esta. Para ello, se mide el tiempo T transcurrido entre el primer pico de subida y el primer pico de bajada. Utilizando este tiempo, a la frecuencia de oscilación se le denominará ω_d , y estará definida de la forma:

$$\omega_d = \frac{\pi}{T} \text{ rad/s} \quad (3.18)$$

Utilizando este semiperiodo se rediseña la matriz $W_{ks}(z)$ de forma que sea diagonal, y que su módulo aumente en torno a esa frecuencia:

$$W_{ks}(z) = \frac{\left(z + \frac{\omega_d}{10\rho}\right)(z + 10\rho\omega_d)}{\left(z + \frac{\omega_d}{\rho}\right)(z + \rho\omega_d)} \quad (3.19)$$

La ecuación (3.19) equivale a un filtro paso banda centrado en ω_d , con ganancia unitaria tanto en baja como en alta frecuencia y cuya anchura de banda es función del parámetro ρ .

- **Construcción de la planta aumentada $P(z)$**

Para la creación de la planta aumentada se puede utilizar la función *sysic* contenida en el *μ -Analysis and Synthesis Toolbox* de *Matlab*. A esta función se le debe proporcionar la especificación de los subsistemas existentes y las interconexiones entre ellos. La salida de esta función es la planta aumentada; en el caso de este

proyecto los modelos matemáticos son proporcionados por un estimador lineal multivariable.

- **Síntesis del controlador $K(z)$**

Para la síntesis del controlador se puede usar la función *hinfsyn*, para resolver el problema de la norma H_∞ . Esta función está contenida en el *μ -Analysis and Synthesis Toolbox* de *Matlab*. A la función *hinfsyn* se le deben proporcionar los siguientes parámetros:

- Planta aumentada
- Número de entradas del controlador
- Número de salidas del controlador
- Gamma máxima
- Gamma mínima
- Tolerancia

La salida de la función *hinfsyn* entrega un controlador que cumple con las especificaciones dadas.

Capítulo 4

4. Resultados y Análisis

En esta sección se muestran los resultados de identificación del sistema multivariable usando diferentes algoritmos de estimación como se presentan en el capítulo 2. A partir de los datos adquiridos de la planta se construyen las señales de control multivariable robusto el cual es mostrado en el capítulo 3.

Se maneja inicialmente un sistema multivariable de 3 entradas y 3 salidas para representarlo en un espacio de estados extendido donde los valores desconocidos de θ son estimados bajo los algoritmos de mínimos cuadrados y proyección. Y por último se encuentran las diferentes señales de control robusto que estabilicen los parámetros encontrados de la planta.

Para probar el desempeño del control robusto acoplado se analiza las respuestas de los sistemas estimados en lazo cerrado con el controlador, donde se tiene en cuenta que el sistema de control logre llevar a la planta a una o múltiples referencias deseadas, tomando el tiempo que tarda el proceso en realizar esta acción y el error en estado estacionario que presenta la planta al realizar el seguimiento de trayectoria. Se introducen perturbaciones externas e internas (tomando en cuenta la incertidumbre de la planta) para determinar nuevamente el error en estado estable y el seguimiento de trayectorias. Estos análisis se realizan sobre los modelos identificados.

Las anteriores técnicas de estimación se desarrollaron sobre el modelo no lineal de QuadCopter mostrado en el capítulo 1, donde a partir de diagramas de bloques en el software de *Simulink* se obtuvo el diseño como se observa en la Figura 10. En el anexo A se presentan todos los bloques utilizados para el diseño de la dinámica de la planta.

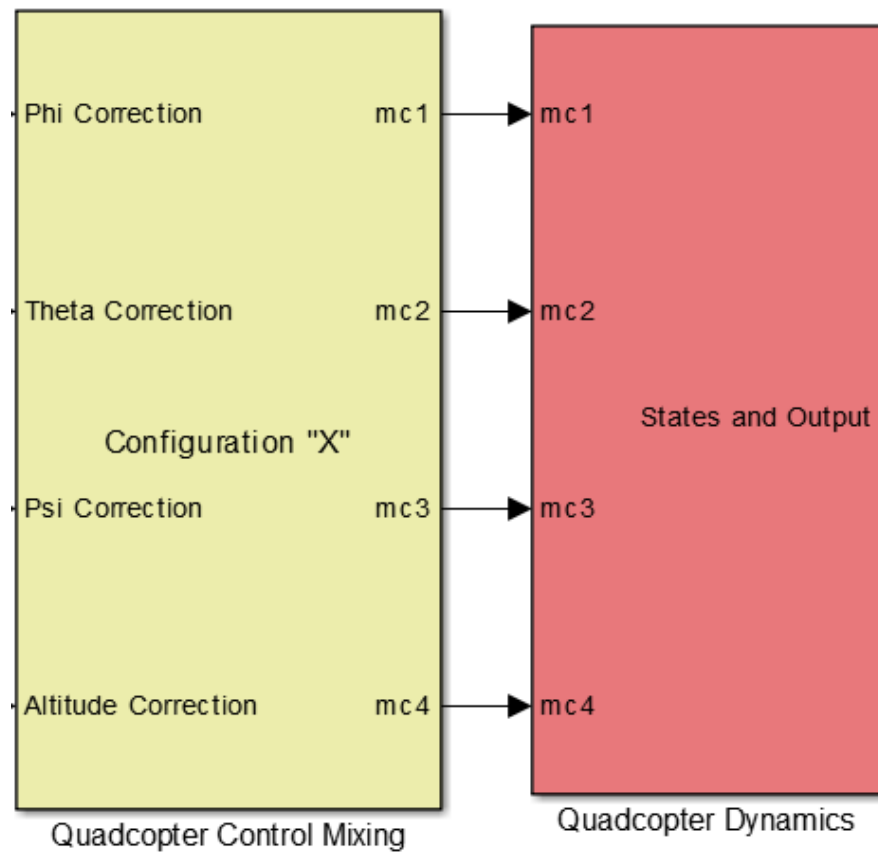


Figura 10. Modelo no lineal del QuadCopter. [1]

4.1 Estimación del QuadCopter

Para la identificación de la planta no lineal se encuentran los parámetros a y b para cada salida como se muestra en (2.6), los cuales serán estimados de manera experimental con un tiempo de muestreo de 10 [ms] y cambios en las referencias de forma aleatoria.

4.1.1 Identificación usando mínimos cuadrados recursivos para el sistema con 3 entradas y 3 salidas

Durante 90 segundos se realizan los cambios de referencias y se registran junto a los valores de salida leídos por la unidad de medición inercial del quadcopter, obteniendo así los vectores de regresión de segundo orden necesarios para el

desarrollo del algoritmo y de esta manera encontrar las salidas estimadas como se muestran en la Figura 11.

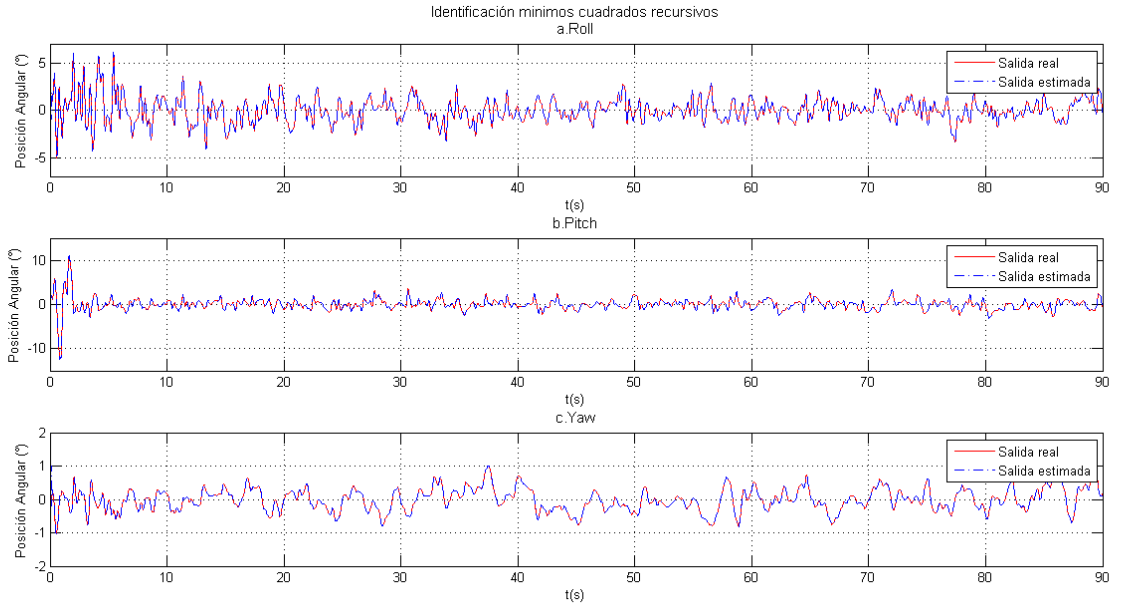


Figura 11. Identificación con mínimos cuadrados recursivos de la planta con 3 entradas y 3 salidas. a) Roll. b) Pitch. c) Yaw. Fuente: Autor.

Como podemos observar en la Figura 11, la estimación de las salidas del sistema representadas por la línea azul se encuentra sobre-puestas en las salidas reales de la planta las cuales son mostradas usando la línea roja, por ende, los valores que se obtuvieron de la dinámica del QuadCopter son aceptados dado que poseemos un error de estimación cercano a 0. Mediante los parámetros de θ obtenidos a partir del algoritmo de identificación tenemos la representación mediante espacio de estados extendido de las salidas del sistema de 3 entradas 3 salidas, así como se observa en la siguiente ecuación:

$$F = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & \text{ceros}_{3 \times 3} & \theta^T_{3 \times 12} & \text{ceros}_{3 \times 3} \\ \text{ceros}_{3 \times 3} & \text{ceros}_{3 \times 3} & \text{ceros}_{3 \times 3} & \text{ceros}_{3 \times 3} \\ \text{ceros}_{3 \times 3} & \text{ceros}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & \text{ceros}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \text{ceros}_{6 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \\ \text{ceros}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$C = [\theta^T_{3 \times 12}] \quad (4.0)$$

Donde los parámetros de θ para cada salida son los siguientes:

θ_{Roll}	θ_{Pitch}	θ_{Yaw}
1.9	-0.025	0.0019
0.025	1.905	3.689e-05
-0.157	-0.061	1.859
-0.905	0.024	-0.00177
-0.026	-0.909	0.000131
0.154	0.064	-0.8597
0.0026	0.00013	-1.552e-05
-0.00026	0.0019	7.405e-05
6.894e-05	0.00018	0.000198
0.0023	-0.00031	-2.906e-05
0.00038	0.0024	6.296e-05
6.66e-05	0.00077	0.000225

Tabla 1. Parámetros del sistema con 3 entradas y 3 salidas usando mínimos cuadrados recursivos. Fuente: Autor.

4.1.2 Identificación usando proyección para el sistema con 3 entradas y 3 salidas

Repitiendo el experimento anterior, pero esta vez usando el algoritmo de proyección obtenemos las salidas estimadas para el sistema acoplado del QuadCopter, las cuales se muestran en la Figura 12.

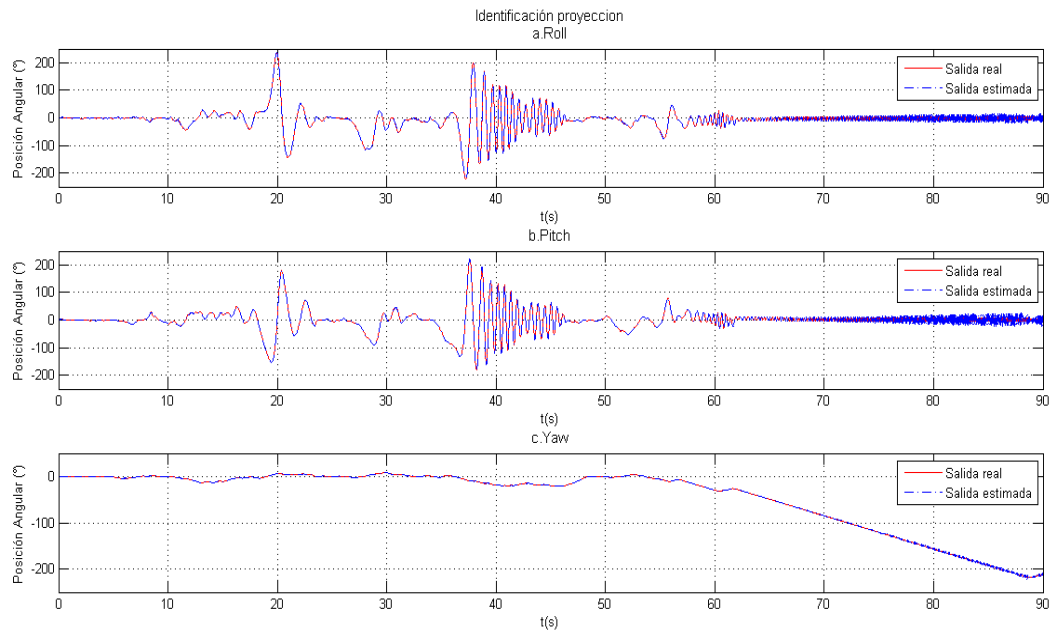


Figura 12. Identificación con proyección de la planta con 3 entradas y 3 salidas. a) Roll. b) Pitch. c) Yaw. Fuente: Autor.

Al igual que la respuesta de la Figura 11, se observa que la estimación está obteniendo unos parámetros muy cercanos a la planta, pero en este caso tenemos errores de estimación de 0.1 dado que en la gráfica a y b se muestra un desfase de la salida estimada respecto a la salida real alrededor de los 60 [s]. Teniendo en cuenta que el error de estimación es mínimo se acepta el modelo y tiene una representación como en (4.0), donde los parámetros encontrados del sistema acoplado son:

θ_{Roll}	θ_{Pitch}	θ_{Yaw}
1.293	0.1332	-0.1719
0.0924	1.664	-0.0541
-0.1752	0.1309	1.465
-0.3851	0.2964	0.1089
-0.3812	-0.7618	0.0879
0.1325	0.0271	-0.4667
-0.1564	-0.0441	0.00851
-0.0139	0.0361	-0.0225
-0.0169	0.1693	-0.0155
-0.0348	0.2038	-0.0292
-0.0315	0.03833	-0.0262
0.1113	0.006474	-0.01114

Tabla 2. Parámetros del sistema con 3 entradas y 3 salidas usando proyección. Fuente: Autor

4.2 Respuesta del sistema en lazo cerrado con un controlador robusto

En esta subsección se utilizan los valores estimados por los diferentes métodos de identificación para diseñar el controlador robusto H_∞ . Utilizando el primer modelo multivariable consignado en la tabla 1, se logró diseñar una señal de control robusta que pudiera estabilizar el sistema y realizar un seguimiento de trayectoria de forma satisfactoria como se muestra en a Figura 13.

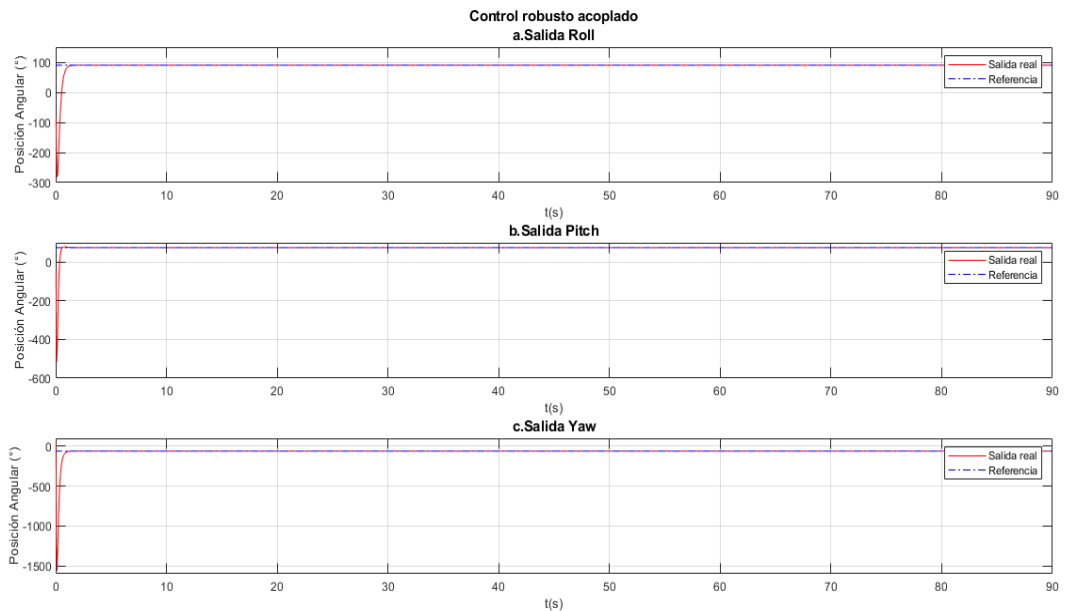


Figura 13. Respuesta del sistema multivariable estimado por mínimos cuadrados con control robusto H_∞ . a) Salida Roll. b) Salida Pitch. c) Salida Yaw. Fuente: Autor.

La Figura 13 nos presenta la respuesta del sistema multivariable acoplado al aplicar la señal de control robusta, al sistema se le aplicó una señal de referencia en grados para cada una de las salidas las cuales fueron 90° para Roll, 75° para Pitch y -60° para Yaw. De las respuestas del sistema multivariable podemos observar que tanto la salida Roll, la salida Pitch y la salida Yaw logran realizar un seguimiento de referencia llegando a un cambio de referencia indicado con errores de estado estacionario de cero sin poseer máximo sobrepaso y en tiempos de establecimiento de 1 segundo.

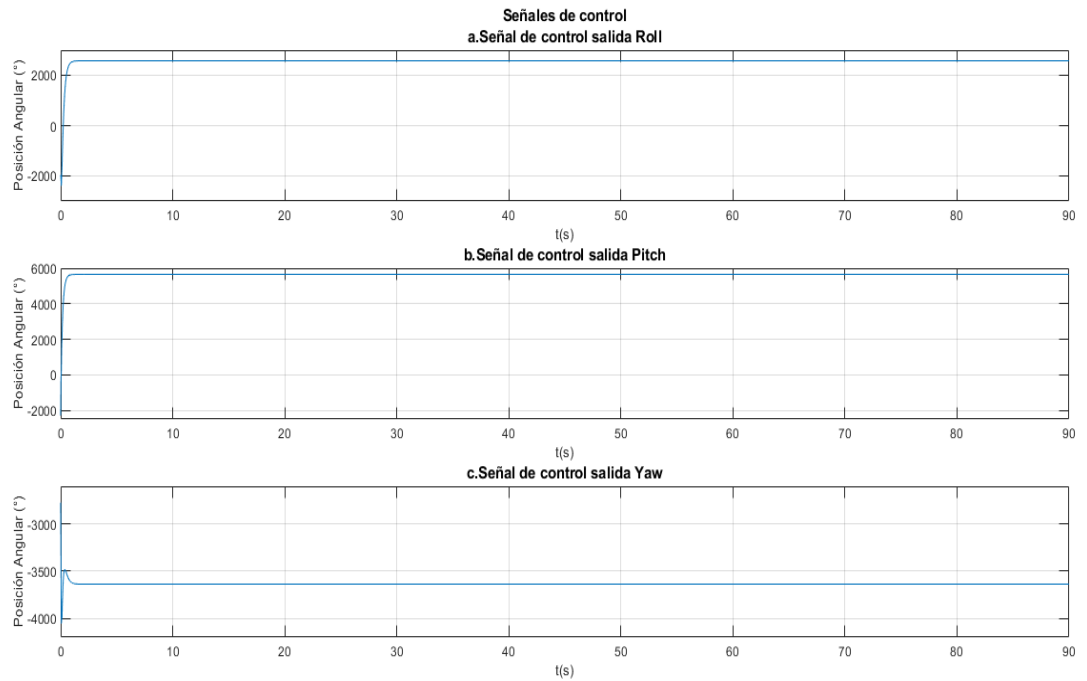


Figura 14. Señales de control robusto para el sistema multivariable estimado por mínimos cuadrados. a) Señal de control salida Roll. b) Señal de control salida Pitch. c) Señal de control salida Yaw. Fuente: Autor.

De la Figura 14 observamos la señal de control necesaria para que las salidas de la planta multivariable puedan realizar un seguimiento de referencia, las gráficas de la Figura 14 presentan una señal de control con una amplitud elevada para resolver el problema seguimiento el sistema multivariable, pero teniendo en cuenta que logra reducir los acoples internos que posee la planta encontrando así la ganancia de control más robusta a la hora de aplicar sobre el sistema multivariable acoplado.

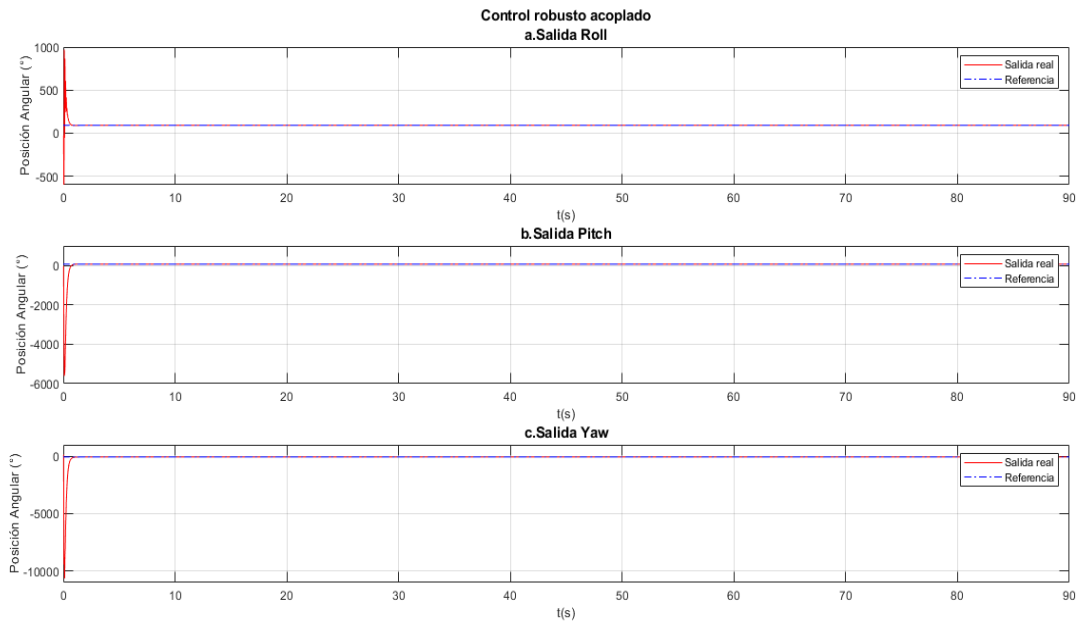


Figura 15. Respuesta del sistema multivariable estimado por proyección con control robusto H_{∞} . a) Salida Roll. b) Salida Pitch. c) Salida Yaw. Fuente: Autor.

De la Figura 15 se muestra la salida de la planta multivariable acoplada usando el algoritmo de proyección al cual son aplicadas las mismas referencias que al sistema de la Figura 13. A la hora de diseñar la señal de control se obtuvo que al ser aplicado sobre el sistema logra seguir cambios de referencias las salidas de la planta, las tres salidas de la planta poseen un error en estado estacionario de cero, y el sistema multivariable presenta un máximo sobrepaso en la gráfica de la salida Roll de 950 el cual es corregido en un tiempo demasiado rápido, pero el sistema multivariable acoplado posee un tiempo de establecimiento mayor que el presentado en la Figura 13, determinando así que el modelo entregado por mínimos cuadrados recursivos es aceptado para resolver el problema de control de seguimiento de referencia dado que presenta mejores valores en las características de las respuestas.

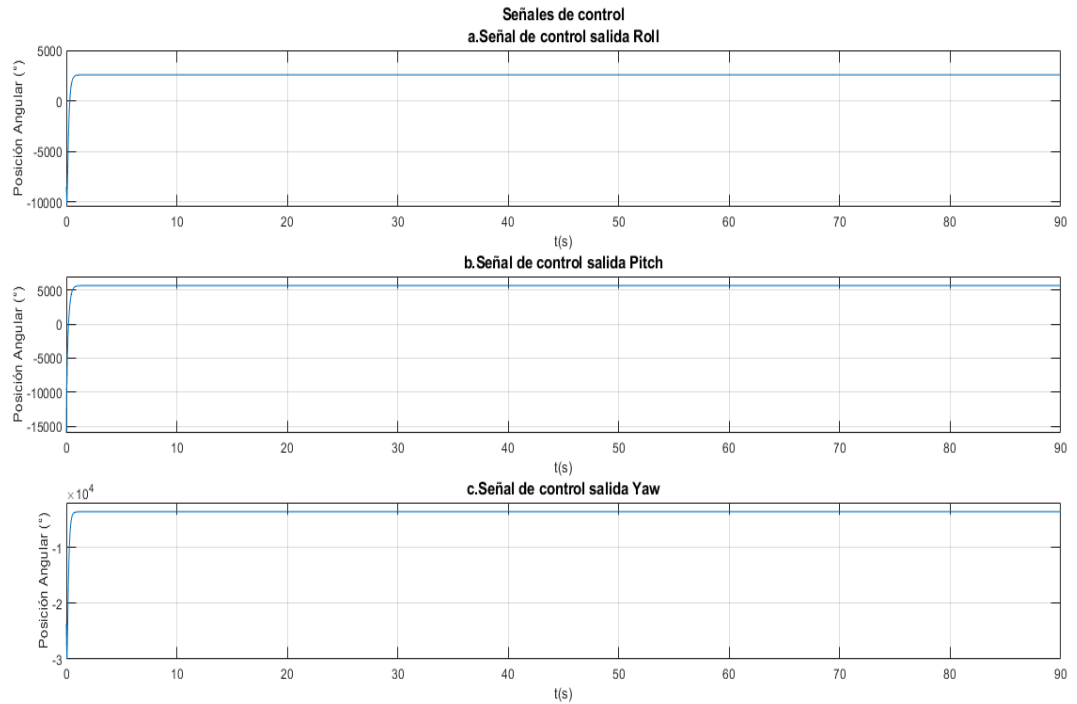


Figura 16. Señales de control robusto para el sistema multivariable estimado por mínimos cuadrados. a) Señal de control salida Roll. b) Señal de control salida Pitch. c) Señal de control salida Yaw. Fuente: Autor.

La Figura 16 contiene las gráficas de amplitud de las distintas señales de control diseñadas para el sistema multivariable acoplado usando la teoría de control H_∞ , en este caso se observa que la amplitud en las tres graficas se aumenta considerablemente con respecto a las gráficas mostradas en la Figura 14 dado que presenta mayor dificultad resolver el problema de seguimiento de referencia teniendo en cuenta una mayor cantidad de incertidumbre en el modelo utilizado para encontrar la ganancia del controlador, pero al igual que en el caso del modelo utilizado en el problema presentado anterior de esta subsección la ganancia de control diseñada logro resolver el problema demorando un poco más.

En la Figura 17 se puede observar la respuesta de un controlador PID desacoplado, se evidencia como el cambio de una de sus referencias influye en mas de una salida, específicamente en el segundo 10 de la simulación, el cambio de la referencia en el eje del yaw genera una perturbación cercana a los 3 grados en los ejes del roll y pitch.

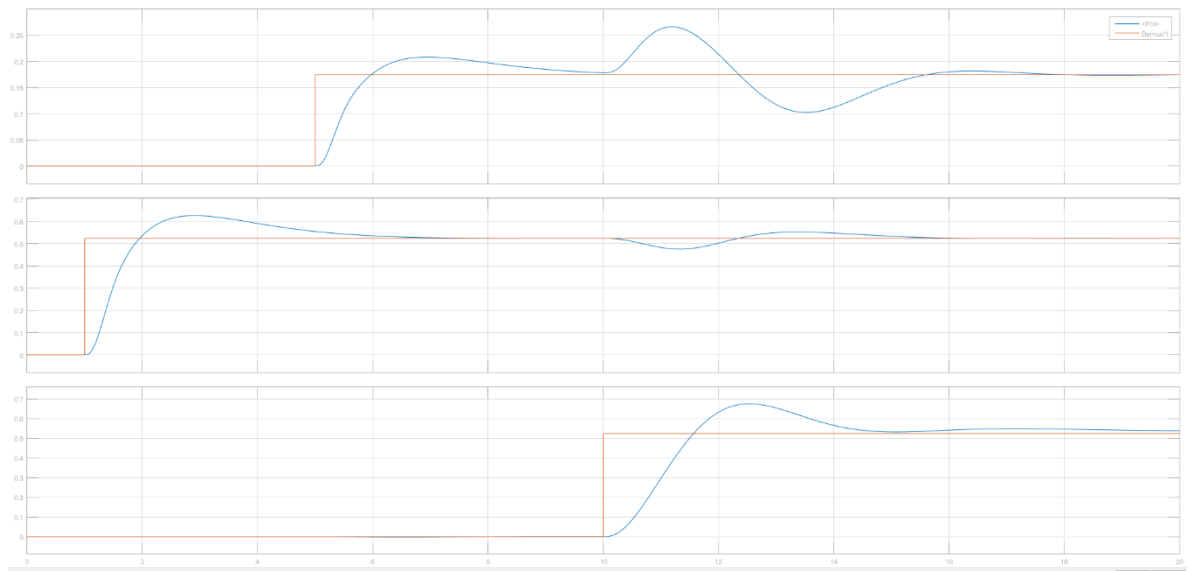


Figura 17 Respuesta de un controlador PID desacoplado. Fuente: Autor

En la Figura 18 se puede observar la disminución del efecto de acoplamiento presente en la planta, en el segundo 1 de la simulación se puede observar como el cambio de la referencia en yaw afecta la salida del roll y pitch en aproximadamente 1 grado, así mismo el cambio de referencia en el eje del pitch genera una perturbación en el eje del pitch de $0,5^\circ$ y $0,26^\circ$ en el eje del yaw, disminuyendo así el efecto de acoplamiento presente en el sistema en comparación con la Figura 17.

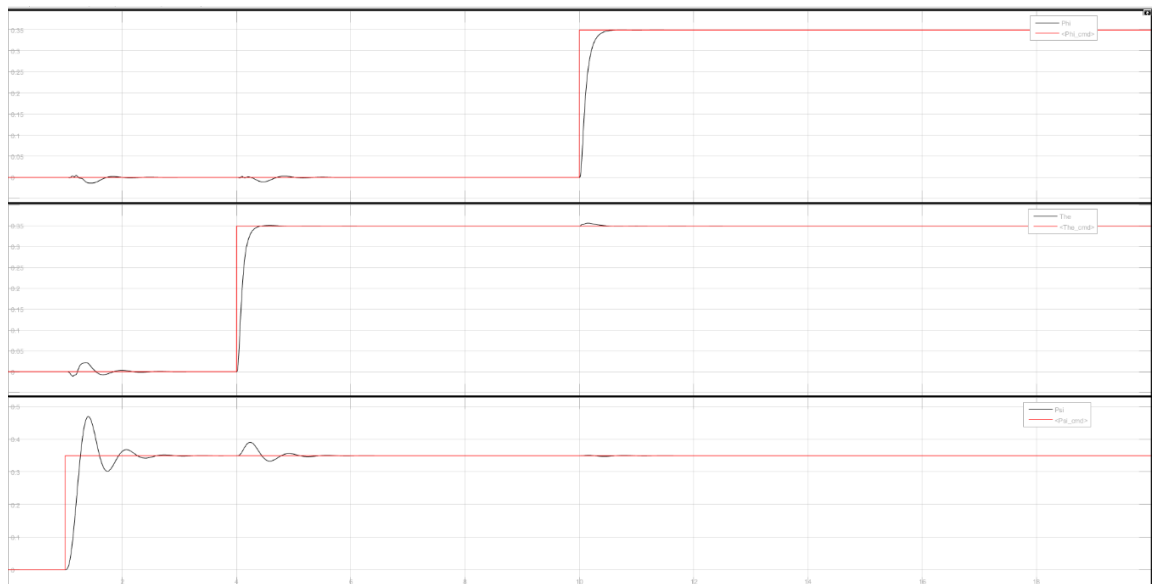


Figura 18 Respuesta de controlador robusto acoplado. Fuente: Autor

4.3 Validación de resultados

En esta subsección se pretende comparar los resultados obtenidos en este trabajo mediante control robusto acoplado con controladores diseñados para un vehículo aéreo no tripulado publicados en documentos científicos.

En [20] se diseña un sistema de control robusto adaptativo para controlar la altura de un QuadCopter del cual se desconoce su masa, se modela matemáticamente el sistema asumiendo que el cuerpo es rígido y simétrico, los rotores son rígidos y el centro de masa coincide con el centro del QuadCopter, se utiliza el análisis de estabilidad de Lylapunov para mostrar que el sistema de control propuesto garantiza que el error del sistema sea asintótico. Aunque se muestran buenos resultados en cuanto al controlador de altura, no se incluye un controlador robusto de estabilidad en el artículo.

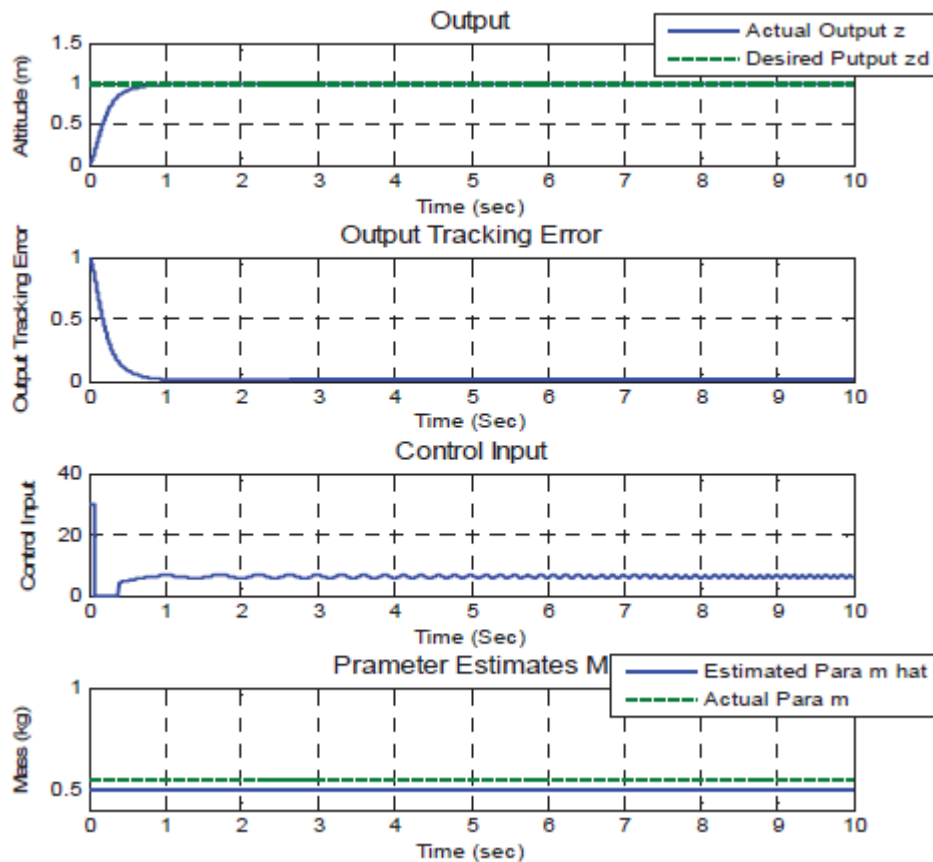


Figura 19 Control ARC con salida constante deseada, usando una masa $m=0.550$. [20]

En [21] diseña un controlador robusto no lineal de seguimiento adaptativo sobre el QuadCopter, mediante el cual se puede observar que la señal de control logra seguir los distintos cambios de referencia en las salidas, pero posee errores en estado estacionario deferente de cero dado los fuertes acoples internos encontrados mediante la estimación de parámetros y definiendo así un tiempo de establecimiento mucho mayor al presentado en la sección de resultados de este proyecto.

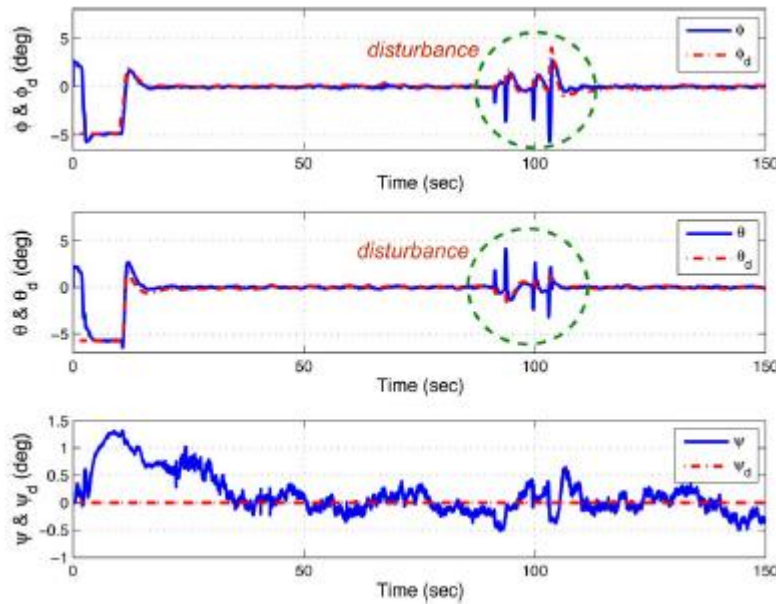


Figura 20 Respuesta deseada (ϕ_d , θ_d , ω_d) y respuesta real (ϕ , θ , ω) de la planta controlada. [21]

En [22] se diseña un controlador de posición y altitud de un QuadCopter usando la ecuación de Riccati a partir del estado dependiente, donde se obtienen unos resultados muy satisfactorios dado que presenta salidas estables sin oscilaciones ni máximo sobrepaso, con un tiempo de establecimiento pequeño. Pero en este caso en particular los autores definen un modelo dinámico fijo del QuadCopter, que a la hora de introducir perturbaciones sobre el sistema en lazo cerrado con el controlador puede presentar problemas, dado que las variables de los parámetros que conforman el modelo dinámico pueden cambiar y las ganancias fijas encontradas del controlador resultan no ser las más eficaces para mantener estable la planta.

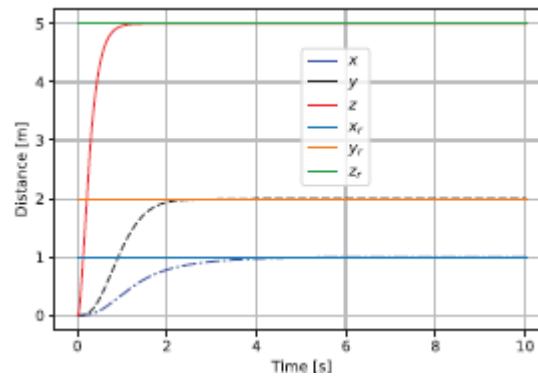


Figura 21. Seguimiento $x=1$, $y=2$, $z=5$. [22]

En [23] se propone un algoritmo de control robusto basado en modos deslizantes para el seguimiento de trayectorias de un QuadCopter. El controlador se prueba con un tramo de una función suave donde se delimitan sus pendientes (derivadas) y se asumen perturbaciones acotadas. Para determinar la estabilidad del controlador se utiliza el análisis de Lylapunov y se realizan simulaciones numéricas para demostrar la efectividad del algoritmo. Encontrando así una respuesta estable donde se tienen errores de estado estacionario diferentes de cero y una respuesta inestable que entrega una oscilación creciente a medida que pasa el tiempo de simulación.

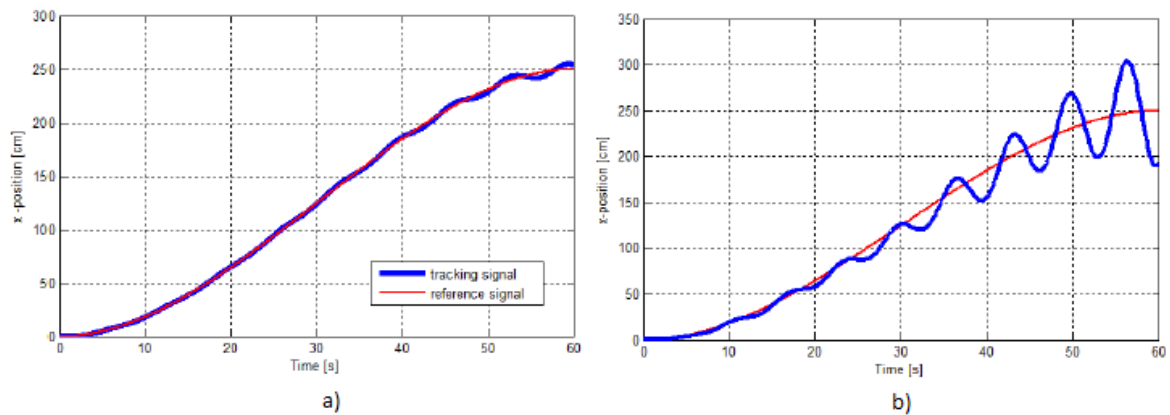


Figura 22 Respuesta del QuadCopter usando un controlador basado en modo deslizante. a) Respuesta estable del sistema. B) Respuesta inestable del sistema. [23]

En [24] se diseña un sistema de control optimo con estimación recursiva de la planta, de la cual podemos observar un comportamiento estable, y donde el controlador logra reducir las oscilaciones de la planta producida por los acoples internos y entregando así un tiempo de establecimiento de 3.7 segundos, el cual supera a los tiempos de establecimientos presentados en la sección de resultados de este proyecto.

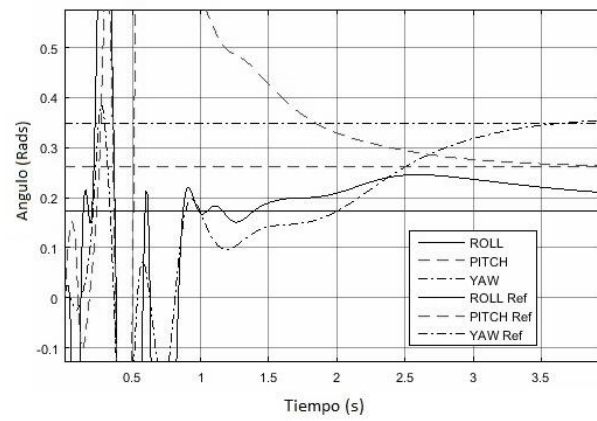


Figura 23 Seguimiento de referencia con control óptimo. [24]

CONCLUSIONES

- Para la identificación de los parámetros del sistema se debe tener en cuenta que el error de estimación que presente el resultado final, debe ser el menor posible para así poder determinar que la incertidumbre con el modelo estimado es la menor.
- Las dos técnicas de identificación por regresión lineal encuentran dinámicas aceptadas mediante las cuales se puede garantizar una parametrización adecuada del sistema de QuadCopter. Cada método logró que los modelos obtenidos a partir de él fueran lo más cercano posible a la planta dado que poseen errores de estimación menores al 1%.
- El controlador robusto H_{∞} , logra realizar el seguimiento de referencias sobre el sistema multivariable acoplado, en tiempos de establecimiento pequeños. Se debe tener en cuenta que el modelo estimado usado para el cálculo de la ganancia del controlador debe ser un modelo muy cercano a la dinámica de la planta, dado que en este caso con un error de estimación de 0.1 presentado por el algoritmo de proyección el controlador presenta un máximo sobre paso el cual corrige rápidamente.
- El aporte principal de este proyecto es la reducción o eliminación del efecto de acoplamiento inherente en los vehículos aéreos no tripulados mediante la implementación de un controlador robusto H_{∞} multivariable y usando un algoritmo de mínimos cuadrados recursivos para encontrar la dinámica de la planta donde se obtuvo un error de estimación de 0.0001.

Apéndice A

Modelo no lineal del QuadCopter en *Simulink*:

En la figura 10 se mostró el modelo de la planta utilizado para el cálculo de la estimación de parámetros de la planta por distintos métodos de estimación, a continuación, se presentan los distintos diagramas de bloques internos de la planta.

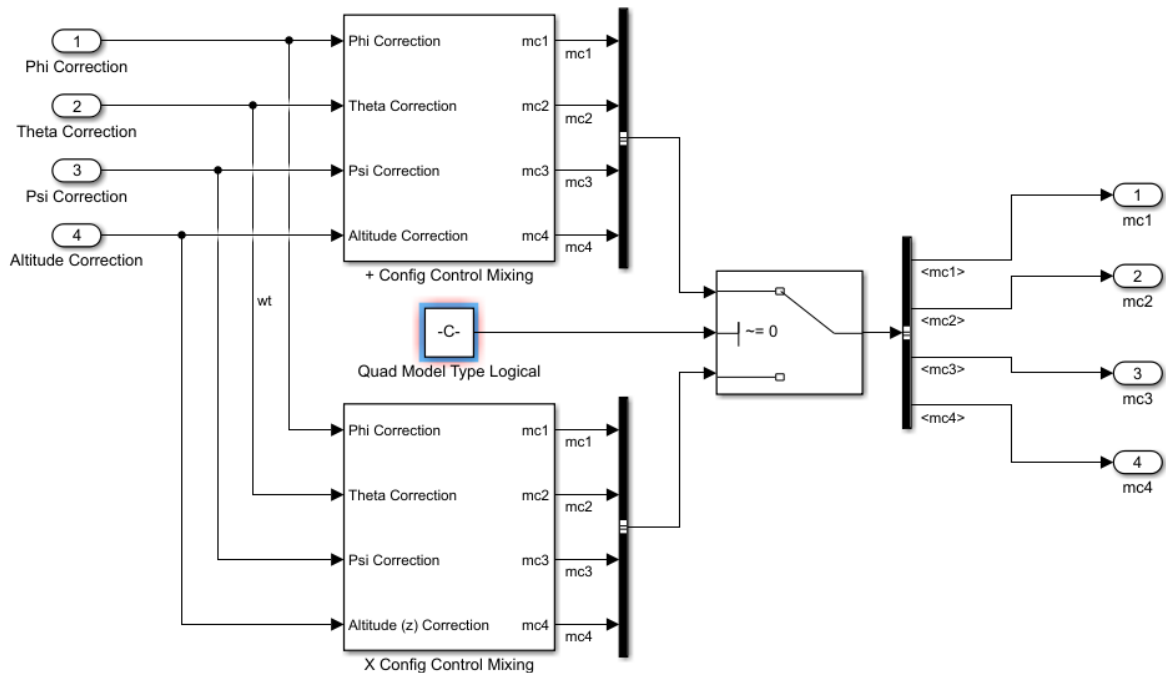


Figure 1. Configuración X del QuadCopter. Fuente: Quad-Sim Master.

De la Figure 1, entregamos la configuración que utilizamos en el modelo y por lo que decimos que construimos una matriz como la que se representa en (1.0).

De la Figura 10 que utilizamos como modelo para realizar las pruebas se observa que además de la configuración en X, posee un bloque que contiene la dinámica de la planta y está constituido por los componentes de la siguiente figura:

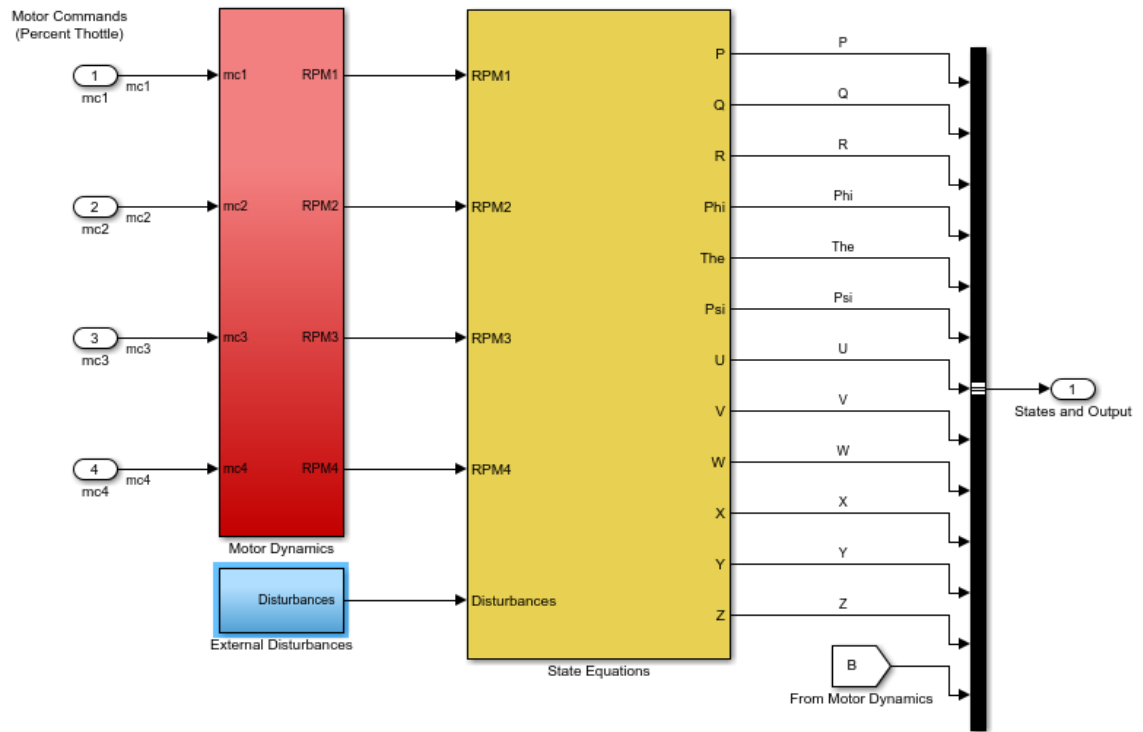


Figure 2. Dinámica de la planta multivariable acoplada. Fuente: Quad-Sim Master

De la Figure 2, se tiene en cuenta que la planta posee unas ecuaciones de estado representadas por (1.6), una dinámica de los 4 motores de la planta que constituyen las entradas del modelo y unas perturbaciones externas que se deben tener en cuenta para poder simular un ambiente hostil como al que se enfrentan los vehículos aéreos no tripulados reales.

These saturations model a SIGNAL LIMITATION.
Other intentional control saturations might be introduced in the control loop to achieve better stability and consistency.

Throttle cutoff can simulate the fact that the motor doesn't spin until a minimum throttle point is reached. This introduces a jump discontinuity in low throttle performance.

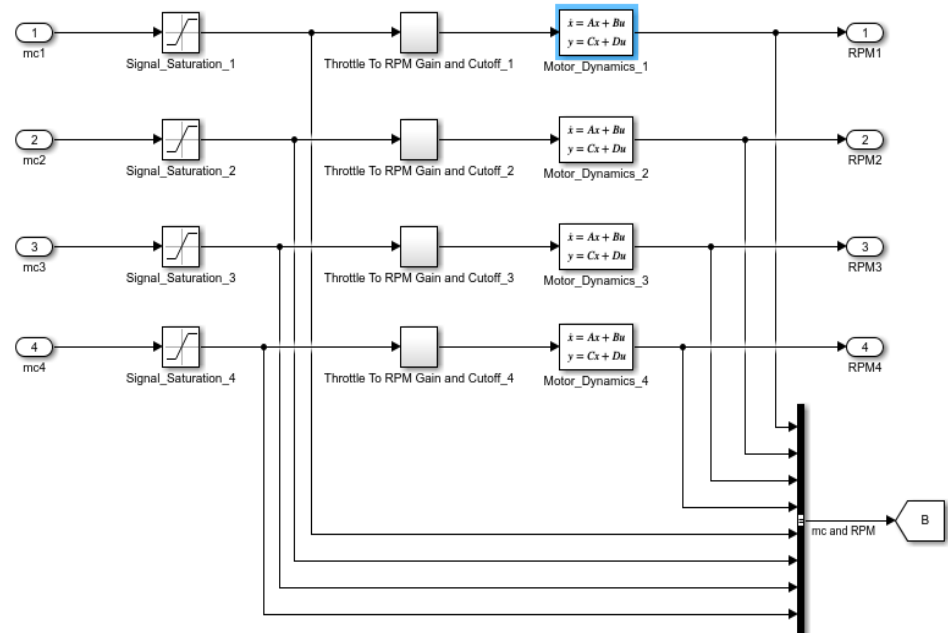


Figure 3. Modelo de los 4 motores del QuadCopter. Fuente: Quad-Sim Master.

Note: Torques are in units of N*m, Forces in N
Torques are applied to the BODY coordinate system.
Forces are applied from the WORLD coordinate system!
This can be changed by adjusting the equations within the S-function.

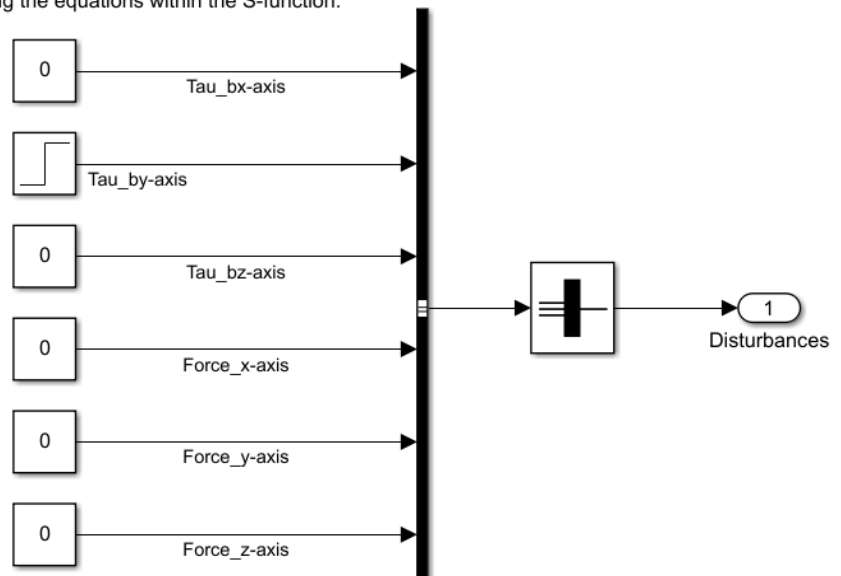


Figure 4. Perturbaciones en el espacio simulado del QuadCopter. Fuente: Quad-Sim Master.

Apéndice B

Relación de Artículos

Artículos en revistas:

“Identificación y control de un vehículo aéreo no tripulado tipo QUADCOPTER”.
Revista: USBMed. Fecha: 2016.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] V. A. P. Fabiani. Autonomous flight and navigation of VTOL UAV for autonomy demonstration to out of sight flights. Science Direct, 2007.
- [2] A. A. Kadamani. Drones para hacer mapas, 17 de febrero 2017. [En línea]. Available: <http://www.sumamente.co/articles/detail/drones-para-hacer-mapas>.
- [3] IFLScience, IFLScience, [En línea]. Available: <http://www.iflscience.com/health-and-medicine/ambulance-drone-could-drastically-increase-heart-attack-survival>.
- [4] S. Kurnaz. Autonomous Navigation and Landing Tasks for Fixed Wings Small Unmanned Aerial Vehicles. Acta politechnica Hungarica, 2010.
- [5] G. M. H. S. L. W. C. J. T. Haomiao Huang. Aerodynamics and Control of Autonomous Quadrotor Helicopters in Aggressive Maneuvering, 2009.
- [6] P. M. Samir Bouabdallah. Autonomous Robots, 2005.
- [7] C, Kemp. Visual control of a Miniature Quad-Rotor Helicopter, 2006.
- [8] I. S. A. P. Corke. System Identification, Estimation and Control for a Cost Effective, IEEE, 2012.
- [9] R. A. M. M. A. D. R. Ritz. Cooperative Quadrocopter Ball Throwing and Catching, IEEE, pp. 4972-4978, 2012.
- [10] M. A. D. R. Hehn. A Flying Inverted Pendulum, IEEE, 2011.
- [11] D. A. H. M. A. D. R. Brescianini. Quadrocopter pole acrobatics, IEEE, 2013.
- [12] K. L. M. M. S. M. J. K. D. Hartman, GiftHub, 2014. [En línea]. Available: <https://www.github.com/dch33/Quad-Sim>.
- [13] Barrientos, A. Fundamentos de Robótica, McGraw-Hill, 1997.
- [14] Luukkonen, T. Modelling and control of quadcopter, 2011.
- [15] Amström, K and Wittenmark, B. Adaptive Control. Second edition. Mineloa, New York: Dover Publications inc, 2008. 590 p.
- [16] Hernandez Jimenez, J. Rodriguez Rios, J. Desarrollo de una metodología para la identificación y control adaptativo por pseudoestados de un Sistema multivariable

acoplado aplicado a TRMS. Pereira, Colombia. 2014. Proyecto de grado presentado como requisito para optar por el título de ingeniero(a) Electricista.

[17] Goodwin, G. Sin, K. Adaptive filtering prediction and control. First edition. New Jersey: Prentice Hall, 1984. 535 p.

[18] Barragan Rodriguez. F. Tecnicas de control robusto H_2/H_∞ para sistemas controlados a través de redes de comunicación. Sevilla, España. 2012. Proyecto de grado presentado para optar al título de Máster oficial en Automática, Robótica y Telemática.

[19] Calabrese, F. Celentano, G. Multo-valued robust control technique for uncertain systems. Decision and control, CDC 2008. 47th IEEE Conference. 2008.

[20] Min, B. Hong, J. Matson, E. Adaptive Robust Control (ARC) for an Altitude Control a Quadrotor Type UAV Carrying an Unknown Payloads. 2011, 11th International Conference on Control, Automation and Systems, Korea.

[21] Zhao. B, Xian, B. Zhang, Y. Zhang, X. Nonlinear Robust Adaptive Tracking Control of a Quadrotor UAV Via immersion and Invariance Methodology. IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, VOL.62, NO. 5, MAY 2015.

[22] Chipofya, M. Lee, D. Position and Altitude Control of a Quadcopter Using State-Dependent Riccati Equation (SDRE) Control. 2017, 17th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2017), Korea.

[23] Salazar, S. Gonzalez, I. Lopez, R. Lozano, R. Simulation and robust trajectory-tracking for a Quadrotor UAV. 2014, International conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), USA.

[24] Giraldo Suarez, E. Muñoz Gutiérrez, P. Bonilla Becerra, J. Identificación y control de un vehículo aéreo no tripulado tipo Quadcopter. USBMed, 2016.